МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Серго Орджоникидзе» (МГРИ)

Геофизический факультет
Кафедра математики

С.С. Качержук

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
для студентов специальности 01.03.04 «Прикладная математика»

Часть I

Линейные пространства

Матрицы

Системы линейных уравнений

Определители

Собственные векторы и собственные значения

Евклидовы пространства

Москва, 2019

УДК 512

Автор

С.С. Качержук – кандидат технических наук, доцент кафедры математики Российского государственного геологоразведочного университета имени Серго Орджоникидзе (МГРИ)

Рецензент

М.Н. Юдин – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Российского государственного геологоразведочного университета имени Серго Орджоникидзе (МГРИ)

Качержук С.С. Основы линейной алгебры: учебно-методическое пособие. Часть I. Линейные пространства. Матрицы. Системы линейных уравнений. Определители. Собственные векторы и собственные значения. Евклидовы пространства. – М.: МГРИ, 2019. – 57 с.

Пособие предназначено для изучения дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» в рамках направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» (академический бакалавриат).

В пособии даются определения линейного и векторного пространства, подробно рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений и матричные способы их решения, излагается основная часть теории определителей и ее приложения к проблеме отыскания собственные векторов и собственных значений числовых матриц, вводятся основные сведения об евклидовых пространствах. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами, что имеет целью облегчить самостоятельную работу студентов.

Пособие построено на современном алгебраическом аппарате и будет весьма полезным для магистрантов, аспирантов и начинающих преподавателей.

Рекомендовано в качестве учебно-методического пособия для направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» (уровень бакалавриата), протокол №12 заседания кафедры математики от 18.06.2019 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие теоретико-практическое пособие предназначено для изучения базовых разделов высшей математики, обычно входящих в курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» для инженерно-технических вузов.

Порядок представления материала использовался автором в течение многолетней практики преподавания курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» для специальности «Прикладная математика» в Российском государственном геологоразведочном университете (МГРИ).

В пособие включены те основные сведения о линейных пространствах, без которых дальнейшее изложение материала было бы необоснованным. Особое внимание уделено векторному пространству $\mathbf{R}^n$, широко используемому во многих фундаментальных и прикладных дисциплинах.

Пособие состоит из трех частей. Часть I пособия преимущественно посвящена системам линейных алгебраических уравнений. Их изучение позволяет выяснить происхождение основных понятий, объектов и алгоритмов матричной алгебры, – таких, как вектор, матрица, линейное пространство, линейная независимость, умножение матриц, ранг матрицы и т.д. Основное внимание уделено методу Гаусса – Жордана и приемам его использования для решения различных задач линейной алгебры (например, для решения матричных уравнений).

Достаточно подробно рассмотрено понятие определителя как числовой характеристики матрицы и возможности его применения в матричной алгебре.

Вводятся понятия характеристического многочлена матрицы и собственных векторов, которые понадобятся при изучении жордановой формы матриц и функций от матриц. Наконец, даются дополнительные сведения о евклидовых пространствах, необходимые для изучения векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве, чему посвящены части 2 и 3 нашего пособия.

В отличие от традиционного, координатного, подхода к изучению основных понятий алгебры и аналитической геометрии автором используется матрично-векторный стиль изложения. Это позволяет не перегружать память обучающихся излишними громоздкими формулами, но развивать логическое мышление через используемый в пособии математический аппарат.

Стиль изложения близок к используемому А.С. Бортаковским и А.В. Пантелеевым [2]. В тексте используются следующие обозначения и сокращения:

л.к.	– линейная комбинация;
метод ГЖ	– метод Гаусса – Жордана;
р.м.	– расширенная матрица;
$\boldsymbol{a}$	– вектор (вектор-столбец);
$\{\boldsymbol{a}_i\}_{\mathbf{m}}$	– система, состоящая из m векторов $\boldsymbol{a}_i$ (одной размерности);
$\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}$	– матрица $\mathbf{A}$ размерности m [строк] на n [столбцов];
$\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$	– [квадратная] матрица $\mathbf{A}$ порядка n;
СЛУ	– система линейных [алгебраических] уравнений;
СЛУ-$m*n$	– система m линейных уравнений с n неизвестными (размерности m на n);
ф.с.р.	– фундаментальная система решений;
$\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$	– линейное [векторное] пространство размерности n;
R	– числовое поле R (множество действительных чисел).

Теоретический материал части I пособия сопровождается многочисленными примерами решения задач, почерпнутых в основном из сборника В.П. Проскурякова [6].

Автор надеется, что изложенные в пособии разделы будут способствовать изучению функций многих переменных (в частности, интегралов по поверхности и теории поля) в курсе математического анализа и других дисциплинах, предусмотренных учебными планами для специальности «Прикладная математика». Пособие может также служить основой разработки конкретных курсов линейной алгебры и аналитической геометрии для других направлений подготовки.

§1. Линейное пространство

Рассмотрим некоторое множество **L** элементов одной природы: **L** = {***a, b, c,...***}, два любых элемента ***a*** и ***b*** которого считаются равными только в том случае, когда совпадают все их характеристики, вплоть до порядка перечисления (местоположения) этих характеристик.

Это оформляется в виде аксиомы *эквивалентности*: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$. Из аксиомы эквивалентности следует аксиома *транзитивности*: если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$.

►*Определение* 1.1. Пусть на множестве **L** определены две *линейные операции*, применимые к любым его элементам и *не выводящие их результат за пределы* **L**:

- операция *сложения*, т.е. правило, по которому любым двум элементам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{L}$ можно поставить с соответствие элемент (*сумму*) $\boldsymbol{c} \in \mathbf{L}$ такой, что $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$;
- операция *умножения на любое число* $\lambda \in F$, т.е. правило, по которому любому элементу $\boldsymbol{a} \in \mathbf{L}$ ставится с соответствие элемент $\boldsymbol{c} \in \mathbf{L}$ такой, что $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda$.

Множество F представляет собой некоторое числовое множество (числовое поле), в роли которого выступают обычно множество R действительных или множество C комплексных чисел.

Пусть также указанные линейные операции (над *любыми* элементами ***a, b, c*** из **L** и с *любыми* $\lambda, \mu \in F$) удовлетворяют аксиомам:

1°. *коммутативности,* или *перестановочности*, сложения: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;
2°. *ассоциативности*, или *сочетательности*, сложения $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$;
3°. *существования* ***нулевого*** элемента $\boldsymbol{0} \in \mathbf{L}$ такого, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$;
4°. *существования* ***противоположного*** элемента $-\boldsymbol{a} \in \mathbf{L}$ такого, что $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$;
5°. *особой роли числовой единицы*: $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;
6°. *ассоциативности умножения* на число: $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\, \boldsymbol{a}$;
7°. *дистрибутивности, или распределительности, умножения* на число относительно сложения элементов из **L**: $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$;
8°. *дистрибутивности умножения* элементов из **L** относительно сложения чисел: $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.

Тогда говорят, что *над числовым полем F* определено ***линейное пространство*** **L**. ◄

▼**Замечания**

1.1. Аксиома транзитивности легко позволяет установить единственность результата для обеих введенных выше линейных операций.

1.2. Операции, записанные в скобках, выполняются прежде других, причем внутренние скобки имеют самый высокий приоритет, т.е. вычисляются в первую очередь.

1.3. Аксиомы 1° – 8° записаны в традиционной форме и читаются как слева направо, так и справа налево в силу аксиомы эквивалентности. В то же время аксиомы 2°, 5° и 6° желательно понимать более развернуто:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c});$$
$$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot 1;$$
$$\lambda\, (\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} = (\mu\lambda)\, \boldsymbol{a} = \mu\, (\lambda\boldsymbol{a}).$$

1.4. Единственность результата сложения двух любых элементов линейного пространства позволяет утверждать, что, для $\forall\ \boldsymbol{c} \in \mathbf{L}$ имеет место равносильность:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Основываясь на этом, легко доказать *единственность* как *нулевого*, так и *противоположного* элементов. Если, например, предположить существование двух нулевых элементов $\boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{0}_1$, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0}_1$, т.е. $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}_1$. Аналогично, для двух различных противоположных элементов, имеем: $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})_1 \Leftrightarrow (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a})_1$.

1.5. Аксиомы 1° и 4° дают также: $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boxed{-(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}.}$

1.6. Для любого $\boldsymbol{a} \in \mathbf{L}$ имеем: $\boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a} = (0 + 1) \cdot \boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{a} + 1 \cdot \boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$, т.е. $\boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$, что равносильно $0 \cdot \boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})] = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) \Leftrightarrow 0 \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, а это дает $\boxed{0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.}$

1.7. Преобразования $\boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{a} = (1 + (-1)) \cdot \boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a} + (-1) \cdot \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} + (-1) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ позволяют, на основании аксиомы 4°, получить еще одно важное соотношение: $\boxed{(-1) \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.}$

Последнее позволяет ввести *операцию вычитания* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ в линейном пространстве как $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$, что приводит к равносильным соотношениям:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}.$$

1.8. На основании аксиом 4° – 7°, для любого числа $\lambda \in F$ справедливо также преобразование $\lambda \cdot \boldsymbol{0} = \lambda\,(\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})) = \lambda \cdot \boldsymbol{a} + \lambda \cdot (-1) \cdot \boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a} + (-\lambda \boldsymbol{a})$, дающее $\boxed{\lambda \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.}$

1.9. Докажем, что $\boxed{\lambda \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \\ \lambda = 0 \end{array}\right.}$. Необходимость легко показывается в силу замечаний 1.6 и 1.8. При доказательстве достаточности остается рассмотреть случай $\lambda \neq 0$. Здесь при $\lambda \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ имеем: $\boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a} = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \boldsymbol{a} = \frac{1}{\lambda} \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, т.е. из $\lambda \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ следует $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Таким образом, рассмотренное соотношение позволяет формальное сокращение векторных равенств на *ненулевой* множитель независимо от того, вектор ли это или число.

1.10. Любое *векторное выражение,* составленное из элементов *линейного* пространства посредством *линейных* операций, *дает элемент, также принадлежащий этому пространству*. На основании приведенных выше аксиом и замечаний, над равенствами, составленными из таких выражений, можно выполнять следующие преобразования:

– перенос слагаемых из одной части в другую, но с противоположным знаком;
– умножение обеих частей равенства на любое ненулевое число;
– прибавление к обеим частям равенства произвольного векторного выражения.

1.11. Линейные пространства с указанной структурой элементов и определенными правилами выполнения линейных операций над ними называют *конкретными*. В качестве поля F обычно используют поле R действительных либо поле C комплексных чисел. ▲

Аксиомы 1 – 8 очевидно выполняются для числовых полей R и C,. потому множества R и C сами являются линейными пространствами. Нетрудно показать, что линейными пространствами также являются: множество, состоящее только из нулевого элемента (*минимальное* линейное пространство); множество многочленов степени *не большей* чем n (многочлены, зависящие от переменной x, считаются равными, если равны их значения при любых $x \in F$).

Множество всех многочленов степени ровно n ($n > 0$) и множество N натуральных чисел линейными пространствами не являются хотя бы из-за отсутствия в них нулевого элемента. Множество Q рациональных чисел также не есть линейное пространство, поскольку операция умножения числа из Q на произвольный элемент поля F может вывести результат за пределы множества Q.

Достаточно подробные сведения о конкретных линейных пространствах можно найти в [5 (гл.2, §1)], [2 (гл.8. п.8.1.3)], а надлежащие упражнения – в [3 (гл.1, §10)].

§2. Линейная независимость в линейном пространстве и его базис.

Элементы линейного пространства часто называют *векторами* и обозначают, по аналогии с числовыми векторами, как $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{L}$. Некоторое *неупорядоченное* множество $\{\boldsymbol{a}_i\} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$, состоящее из m векторов $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{L}$, называется *системой векторов*. Кратко такую систему будем записывать как $\{\boldsymbol{a}_i\}_m$, $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{L}$.

Выражение $\boldsymbol{w}$ вида $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n$, или $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j$, где $\boldsymbol{a}_j$ – элементы линейного пространства, x_j – произвольные числа, а $n \in N$, называется *конечной линейной комбинацией* (сокращенно – *л.к.*) этих элементов с числовыми коэффициентами x_j. Если *все* числовые коэффициенты л.к. – нулевые, то она называется *тривиальной*. Любая тривиальная л.к. *элементов линейного пространства*, в силу замечания 1.6, дает нулевой элемент. Отдельно взятый элемент $\boldsymbol{a}_j$ есть, очевидно, частный случай л.к., состоящей из одного слагаемого с коэффициентом 1 при $\boldsymbol{a}_j$.

Говорят также, что вектор $\boldsymbol{w}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a}_j$.

►*Определение* 2.1. Система $\{\boldsymbol{a}_i\}_n$, $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{L}$ – ***линейно независима***, если *только тривиальная* л.к. *всех* ее элементов дает нулевой элемент (нуль-вектор) $\boldsymbol{0} \in \mathbf{L}$. Если же существует (хотя бы одна!) нетривиальная л.к. *всех* элементов системы, дающая нуль-вектор, то система $\{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{n}$ – ***линейно зависима***. ◄

Формализуем это определение, используя символ $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ (равносильности в смысле определения):

$$\left\langle \{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{n} \text{ - линейно независима} \right\rangle \underset{def}{\Leftrightarrow} \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \right\rangle, \tag{2.1}$$

$$\left\langle \{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{n} \text{ - линейно зависима} \right\rangle \underset{def}{\Leftrightarrow} \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0 \right\rangle. \tag{2.2}$$

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов: система $\{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{n}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из элементов этой системы линейно выражается через остальные.

Действительно, из (2.2) следует, что для линейно зависимой системы хотя бы один из коэффициентов $x_i \neq 0$. Пусть таковым является x_k. Тогда, при условии $x_k \neq 0$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow x_k \boldsymbol{a}_k + \sum_{i=1\,(i\neq k)}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_k = \sum_{i=1\,(i\neq k)}^{n} \left(-\frac{x_i}{x_k} \right) \boldsymbol{a}_i ,$$

что доказывает достаточность. Если же один из элементов этой системы линейно выражается через остальные, то имеем $\boldsymbol{a}_k = \sum\limits_{i=1\,(i\neq k)}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i \Leftrightarrow (-1)\boldsymbol{a}_k + \sum\limits_{i=1\,(i\neq k)}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq x_k^2 = 1$, что указывает на линейную зависимость системы, т.е. доказывает необходимость.

►<u>*Определение*</u> <u>2.2</u>. ***Базисом*** линейного пространства $\mathbf{L}$ называется линейно независимая *упорядоченная* система $\{\boldsymbol{e}_i\}_\mathbf{n}$, $\boldsymbol{e}_i \in \mathbf{L}$, позволяющая выразить *любой* элемент $\boldsymbol{a} \in \mathbf{L}$ через линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \,. \tag{2.3}$$

Здесь x_i – числовые коэффициенты, называемые *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в данном базисе.◄

▼**Замечания**

2.1. Нетрудно показать, что система, содержащая нулевой вектор или линейно зависимую подсистему, является линейно зависимой (достаточно составить л.к. с нулевыми коэффициентами при линейно независимых векторах, но с ненулевыми – при линейно зависимых).

2.2. Из определения (2.2) следует, что если существует хотя бы одна *нетривиальная* л.к. векторов системы $\{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{m}$, дающая $\boldsymbol{0}$-вектор, то таких комбинаций – бесконечно много. Действительно, для такой л.к., в частности, имеем:

$$\left[\sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \neq 0 \right] \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{m} k x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} k^2 x_i^2 \neq 0 \right] \text{ для } \underline{\text{любого}}\ k \in F\backslash\{0\}).$$

2.3. Система векторов $\{\boldsymbol{e}_i\}_\mathbf{n}$, представляющая базис пространства $\mathbf{L}$, обеспечивает *единственность* разложения любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbf{L}$ по векторам базиса. Действительно, имея два разложения вида (2.3) одного и того же вектора (с координатами x_i и y_i), после вычитания одного из разложений из другого получаем $\boldsymbol{0} = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\boldsymbol{e}_i$, что в силу линейной независимости базисных векторов немедленно приводит к $x_i = y_i$ для всех $i = 1, 2,\ldots, n$.

2.4. Число n векторов, представляющих базис линейного пространства $\mathbf{L}$, называют его *размерностью*, причем само пространство обозначают как $\mathbf{L}^\mathbf{n}$. В зависимости от того, является ли n конечным или же может быть сколь угодно большим, пространство называют *конечномерным* или *бесконечномерным*.

2.5. Минимальное линейное пространство $\{\boldsymbol{0}\}$(и только оно!) является 0-мерным и базиса не имеет. ▲

§3. Числовые векторы. Векторное пространство

►<u>*Определение* 1.1</u>. <u>*Числовым вектором*</u> (*вектором-столбцом*) ***a*** размерности n ($n\in\mathbf{N}$) называется *упорядоченное* множество (a_i), состоящее из n произвольных чисел a_i (*координат* вектора ***a***), принадлежащих некоторому числовому полю F, и записанное в виде столбца, заключенного в круглые скобки.

Множество *всех* числовых векторов размерности n образует <u>*векторное пространство*</u> размерности n, которое обозначается как $\mathbf{R^n}$. ◄

В дальнейшем, если не потребуется уточнений, числовой вектор-столбец ***a*** будет называться просто ***вектором*** и обозначаться как $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R^n}$ или как $\boldsymbol{a} = (a_i)$, $i = 1, 2,\dots, n$ (буквенные обозначения самого вектора и его координат, как правило, совпадают).

Ниже приводятся примеры векторов: ***a*** (общего вида), ***–a*** (противоположного вектору ***a***), ***0*** (нулевого) размерности n и произвольного вектора $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R^3}$ – т.н. *текущего вектор*а, который используется в том числе для описания прямых и плоскостей в трехмерном пространстве. Записываются эти векторы как векторы-столбцы:

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix},\quad -\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\dots\\-a_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}\in\mathbf{R^n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Введем, для векторов ***a*** и ***b*** размерности n (т.е для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\mathbf{R^n}$) определения равенства векторов и линейных операций сложения и умножения на число $\lambda\in F$ через операции над соответствующими координатами:

$3.0^\circ.\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad b_i = a_i,\ i = 1, 2, \dots, n;$

$3.1^\circ.\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \quad\Leftrightarrow\quad c_i = a_i + b_i,\ i = 1, 2, \dots, n;$

$3.2^\circ.\ \lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \quad\Leftrightarrow\quad c_i = \lambda a_i,\ i = 1, 2, \dots, n.$

Учитывая использованные выше понятия нулевого и противоположного векторов, легко убедиться в справедливости аксиом $1^\circ – 8^\circ$, т.е. показать, что множество всех числовых векторов размерности n, т.е. пространство $\mathbf{R^n}$, является *линейным* пространством.

▼Замечания

3.1. Вектор $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R^n}$ можно интерпретировать при $n = 2$ как некоторую *точку* A двумерного пространства $\mathbf{R}^2$ (*плоскости*). При $n = 3$ это уже точка *трехмерного пространства* $\mathbf{R}^3$, а в общем случае – точка n-мерного пространства $\mathbf{R^n}$. В силу этого векторное пространство называют также *векторно-точечным*, или *аффинным*. В аффинном пространстве, в отличие от *метрических* пространств (см. §18), нет способа измерения длин векторов и углов между ними. Началу координат O соответствует нуль-вектор ***0***. Начало координат O в аффинном пространстве называют также *полюсом*.

3.2. Векторы, связанные равенством $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$, называются взаимно *коллинеарными*. Сам факт коллинеарности обозначается как $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$. Согласно замечанию 1.6, имеем $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{0}$ для любого $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R^n}$. Коллинеарные векторы широко используются в аналитической геометрии, в частности для получения уравнений прямых на плоскости и в пространстве.

Запись $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c} \Leftrightarrow \lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$ следует рассматривать как одно из необходимых и достаточных условий (далее – НДУ) коллинеарности двух векторов.

3.3. Понятия линейной зависимости векторов и базиса, данные в §2, автоматически переносятся на векторное пространство (как линейное). При этом, как будет показано ниже, размерности векторов и пространства совпадают.

Особую роль в пространстве $\mathbf{R^n}$ играют *базисные векторы* $\boldsymbol{e_i}$, в совокупности составляющие, как упорядоченное множество, так называемый <u>*стандартный ортонормированный базис*</u> пространства $\mathbf{R^n}$:

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\dots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\dots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\dots\\0\end{pmatrix},\cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Строгое определение ортогональности и ортонормированного базиса будет дано ниже, в §20. Векторы, входящие в ортонормированный базис, называют также *ортами*.

Считается, что каждому базисному вектору с номером i, при его стандартном положении, соответствует единица на i-той координатной оси системы координат (не обязательно декартовой прямоугольной). Как следствие, каждый базисный вектор имеет длину, равную 1 (в том базисе, которому принадлежит этот базисный вектор!).

Привлекая линейные операции над векторами, легко получить *разложение произвольного вектора* по векторам *стандартного ортонормированного базиса*, причем единственное:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + \dots + a_n \boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i . \qquad (3.1)$$

При решении задач в $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ вместо $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ часто употребляют другие обозначения ортов: $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ соответственно. Так, например, $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. ▲

§4. Числовые матрицы

В §3 мы рассматривали вектор-столбец $\boldsymbol{a}$ как упорядоченное множество чисел (координат вектора). В свою очередь, *упорядоченное множество* $(\boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ *векторов-столбцов* $\boldsymbol{a}_j \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, образует новый объект – *числовую матрицу* **A** размерности $m * n$ (обозначаемую как $\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}$). По сути, такая матрица есть прямоугольная таблица чисел $a_{ij} \in F$ (элементов матрицы), состоящая из m строк и n столбцов:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{m*n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{a}_2, \quad ,\boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{a}_j), \text{ где } \boldsymbol{a}_j \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}.$$

Обозначение a_{ij} следует понимать как $a_{i,j}$, где индексы i и j есть соответственно номер строки и номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} матрицы **A**.

С другой стороны, a_{ij} есть i-тая координата j-того вектора $\boldsymbol{a}_j$ (далее будем писать: i-координата j-вектора $\boldsymbol{a}$).

В дальнейшем, если только не потребуется уточнений, будем считать, что $a_{ij} \in R$.

Матрицы, в зависимости от цели, записывают либо в развернутом виде (4.1), либо сокращенно – обозначая ее элементы индексированными строчными буквами, соответствующими прописной, обозначающей саму матрицу. Например, матрица **A** с элементами a_{ij} записывается как $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{m*n}} = (a_{ij})$. Если размерность матрицы в ее обозначении явно не указана, то следует писать: $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\underline{i = 1, 2, \dots, m;\ \ j = 1, 2, \dots, n}$ (будем заменять подчеркнутое на «для всех i, j»). В любом случае из обозначения матрицы, если это не оговорено заранее, должна быть ясна ее размерность.

По аналогии с числовыми векторами, определим равенство матриц (одной и той же размерности $m * n$) и введем две линейные операции – сложения матриц и умножения матрицы на любое число $\lambda \in F$:

4.0°. **A = B**	⇔	$b_{ij} = a_{ij}$	для всех i, j;
4.1°. **A + B = C**	⇔	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	для всех i, j;
4.2°. λ**A = C**	⇔	$c_{ij} = \lambda a_{ij}$	для всех i, j.

Определим также нулевую матрицу $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{m*n}} = (0)$ (все ее элементы – нули) и противоположную матрице $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{m*n}} = (a_{ij})$ матрицу $\mathbf{A} = -\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}} = (-a_{ij})$ для всех i, j. Легко показать, что $\mathbf{A} + \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{A}$, $0 \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\Theta}$, $(-1) \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{A}$ для любых $\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}$; $\lambda \cdot \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}$ для любого $\lambda \in R$.

Теперь проверка аксиом 1° – 8° из определения 1.1 приводит нас к выводу, что множество *всех числовых* ***матриц*** <u>одной и той же размерности $m * n$</u> образует линейное пространство (обозначаемое как $\mathbf{R}^{\mathbf{m*n}}$).

▼Замечания

4.1. Вектор-столбец $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ можно понимать как матрицу $\mathbf{A}_{\mathbf{m*1}}$, состоящую из одного столбца, а вектор-строку $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ – как матрицу $\mathbf{B}_{\mathbf{1*n}}$, состоящую из одной строки. Иногда мы будем обозначать указанные векторы как $\boldsymbol{a}_{\mathbf{m*1}}$ и $\boldsymbol{b}_{\mathbf{1*n}}$ соответственно.

4.2. ►<u>*Определение* 4.2.</u> Матрица $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{n*m}} = (a'_{ij})$ называется *транспонированной* по отношению к матрице $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{m*n}} = (a_{ij})$, если $a'_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j. ◄

Согласно этому определению, строки (столбцы) матрицы **A** становятся столбцами (строками) матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ с теми же номерами, и наоборот.

Например, для $\mathbf{A}_{\mathbf{2*3}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ имеем $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A}_{\mathbf{2*3}})^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})_{\mathbf{3*2}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Операция транспонирования является одной из *нелинейных* операций над матрицами. Очевидны простейшие свойства этой операции:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}. \tag{4.2}$$

4.2.1. Если координаты вектора записаны по горизонтали, то говорят о *векторе-строке* $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2,...,a_{\mathrm{n}}) = (a_1 \ \ a_2 ... \ a_{\mathrm{n}})^{\mathrm{T}}$ как о *транспонированном* векторе-столбце.

4.3. Ниже мы часто будем рассматривать матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{n*n}}$. Их называют *квадратными* матрицами <u>*порядка n*</u> и обозначают как $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$. *Среди квадратных* матриц выделяют:

а) верхние треугольные $\overline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots t_{nn} \end{pmatrix}$, в которых $t_{ij} = 0$ для всех $i > j$;

б) нижние треугольные $\underline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$, в которых $t_{ij} = 0$ для всех $i < j$;

в) симметрические $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$, в которых $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j или же как такие, для которых $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$;

д) диагональные $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = (d_{ij})$, где $d_{ij} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ для всех } j \neq i, \\ d_{ii} \text{ для всех } j = i; \end{array}\right.$

е) единичную $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$, где $\delta_{ij} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ для всех } j \neq i, \\ 1 \text{ для всех } j = i. \end{array}\right.$ (символ *Кронекера*).

ж) скалярные $\mathbf{S} = s \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s \end{pmatrix} = (s_{ij})$, где $s_{ij} = \left[\begin{array}{ll} 0 & \text{для всех } j \neq i, \\ s \notin F & \text{для всех } j = i; \end{array}\right.$

4.3.1. Диагональ квадратной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{n}} = (a_{ij})$, на которой расположены элементы a_{ii} с совпадающими номерами строк и столбцов ($j = i$) называют *главной*, а другую ее диагональ − *побочной*. Элементы побочной диагонали суть $a_{i,\, n-i+1}$ для всех $i = 1, 2,\dots, n$.

4.4. Суммируя все элементы матрицы $\mathrm{A}_{\mathbf{m*n}} = (a_{ij})$ по строкам (а затем складывая полученные суммы G_i) или по столбцам (а затем складывая полученные суммы V_j), мы приходим к одной и той же сумме S всех элементов матрицы, или так называемой *двойной сумме* $S = \sum_{i=1}^{m} G_i = \sum_{j=1}^{n} V_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Исходя из различия в способах суммирования, получаем *основное свойство двойных сумм*:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\Big),} \tag{4.3}$$

т.е. индексы суммирования (i и j) в двойной сумме можно переставлять местами, но вместе с соответствующими верхними пределами (m и n).

§5. Системы линейных уравнений и способы их представления

Ниже мы будем рассматривать *системы линейных* [*алгебраических*] *уравнений* (СЛУ) как неотъемлемый аппарат линейной алгебры, служащий для решения большинства ее задач. Каково происхождение линейных операций, использованных при определении линейного пространства? Как выразить один вектор через другие? Как выяснить линейную зависимость или независимость данной системы числовых векторов? Каким образом появилось понятие определителя? Мы найдем ответы на эти и многие другие вопросы, используя именно системы линейных уравнений.

Поставим задачу выразить данный вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R^m}$ через известные векторы $\boldsymbol{a}_j \in \mathbf{R^m}$ (j = 1, 2, …, n), т.е. представить его в виде л.к. $\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j$. Записывая последнее равенство справа налево и меняя местами сомножители, получаем:

$$\boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n x_n = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}. \tag{5.1}$$

Запишем (5.1) в координатной форме, используя определенные в §2 операции 2.0º – 2.2º. Это приводит к ***развернутой форме*** записи <u>системы m линейных уравнений с n неизвестными</u> $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (далее – СЛУ-$m*n$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot x_1 & + & \boldsymbol{a}_2 \cdot x_2 & + \ldots + & \boldsymbol{a}_n \cdot x_n & = & \boldsymbol{b} \end{array}$$

Здесь a_{ij} и b_i – произвольные, но фиксированные числа; x_j – неизвестные числа, или просто неизвестные; числа m и n определяют размерность системы. Под системой (5.2) показано соответствие ее с записью (5.1) – ***векторной формой*** записи СЛУ-$m*n$. В последней записи, если она самостоятельна, должно быть указано, что $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_j \in \mathbf{R^m}$.

Если использовать ***символ суммирования***, то отдельное i-уравнение этой системы можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \tag{5.2.1}$$

а саму систему – как

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.2.2}$$

Запись СЛУ в виде расширенной матрицы. Исключим из записи (5.2) все знаки сложения и умножения вместе с неизвестными, а также заменим знаки равенства вертикальной чертой. Заключив полученную конструкцию в круглые скобки, получим так называемую *расширенную матрицу* (р.м.), полностью определяющую СЛУ (5.2):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A_{m*n}} \mid \boldsymbol{b}) \tag{5.3}$$

В этой записи каждая строка расширенной матрицы должна читаться и читается как соответствующее уравнение системы (5.2).

Такая форма записи СЛУ наиболее удобна для реализации процесса ее решения. При этом желательно вынести неизвестные за пределы этой расширенной матрицы и записать их над соответствующими столбцами матрицы системы, а для отслеживания преобразований СЛУ – записать слева от расширенной матрицы обозначения уравнений (u_i):

$$\begin{array}{r} \\ u_1 \to \\ u_2 \to \\ \cdots\cdots \\ u_m \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \end{array} \tag{5.3.1}$$

Матричная запись СЛУ. Упорядоченное множество (x_j) неизвестных в СЛУ-$m*n$ также представляет собой числовой вектор. Будем понимать его как вектор-столбец $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Тогда запись (5.2) системы уравнений понимается, по определению, как произведение матрицы $\mathbf{A_{m*n}}$ на вектор $\boldsymbol{x}$, приравненное к вектору $\boldsymbol{b}$. Используя (5.2.1), получаем определение произведения матрицы на вектор:

$$\boxed{\mathbf{A_{m*n}}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} \blacktriangleleft \tag{5.4}$$

Это определение дает возможность записать систему (5.2) в матричной форме (при этом символ умножения, как правило, опускают):

$$\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{5.4.1}$$

Строго говоря, здесь следует писать $\mathbf{A_{m*n}}\ \mathbf{X_{n*1}} = \mathbf{B_{m*1}}$ (*вектор-столбец* можно рассматривать как *матрицу,* состоящую только из одного столбца), однако запись (5.4.1) является более распространенной.

Все приведенные выше записи СЛУ-$m*n$ являются эквивалентными:

$$\boxed{(5.2) \Leftrightarrow (\mathbf{A_{m*n}} \mid \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (j = 1, 2, \ldots, n) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}\, (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_j \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}) \Leftrightarrow \mathbf{A_{m*n}}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}}.$$

▼Замечания

5.1. При $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ система $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ называется *неоднородной*, а при $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ – *однородной*. По отношению к исходной системе $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, систему $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ называют также *приведенной*.

5.2. В частном случае матрица **A** в (5.4) может состоять из одной строки, что соответствует СЛУ-1*n. Тогда формула 5.4 переходит в алгоритм умножения вектора-строки $\boldsymbol{a}_{\mathbf{1*n}}$ на вектор-столбец $\boldsymbol{x}_{\mathbf{n*1}}$, что с учетом замечания 4.1 дает в результате только одно число b:

$$\boldsymbol{a}_{\mathbf{1*n}}\ \boldsymbol{x}_{\mathbf{n*1}} = \boldsymbol{b}_{\mathbf{1*1}} \quad \Leftrightarrow \quad b_{11} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_{j1} \quad \Leftrightarrow \quad b = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\ .$$

Левый сомножитель $\boldsymbol{a}_{\mathbf{1*n}}$ можно понимать как транспонированный вектор-столбец $\boldsymbol{a}$, что дает возможность записать, для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$,

$$\boxed{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}.} \tag{5.5}$$

Если вектор-столбцы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ рассматриваются над полем R действительных чисел, то (5.5) понимается как координатная форма представления *скалярного произведения* $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ (см. §20). Тогда можно записать:

$$\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{x}\,,\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{5.5.1}$$

где вектор $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ есть *i-столбец* матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, т.е. *i-строка* матрицы **A**.

5.3. Множество уравнений в (5.2) является, вообще говоря, *неупорядоченным*. Это значит, что имея m попарно различных [линейных] уравнений, в общем случае можно получить $m! = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ различающихся по расположению уравнений систем, представляющих одну и ту же СЛУ. Кроме того, за счет синхронной перестановки слагаемых во всех n уравнениях, можно получить еще $n!$ различных форм записи одной и той же СЛУ.

Следовательно, в общем случае одна и та же СЛУ-$m*n$ может быть представлена $m!\cdot n!$ <u>*различными*</u> (определение 4.0°) числовыми матрицами $\mathbf{A_{m*n}}$.

5.4. При умножении матрицы на вектор по (5.5.1) рекомендуется *левый* сомножитель (матрицу) записывать через транспонированную матрицу: $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Этот прием значительно упрощает процесс формирования сумм произведений *соответствующих* координат векторов-столбцов.

Пример 5.1. Умножим матрицу $\mathbf{A}_{4*3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ на вектор $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Имеем: $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6+0 \\ 6-9+0 \\ 10+3+0 \\ 8-3+0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}}}$.

Умножим, для пояснения, отдельно взятый третий вектор-столбец матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ на тот же вектор $\boldsymbol{x}$: $b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + 2\cdot 0 = 10 + 3 + 0 = 13$. ▶

5.5. Умножение матрицы на вектор можно проводить, не опираясь на (5.5.1). Действительно, любую ненулевую матрицу $\mathbf{A}_{m*n}$ можно рассматривать как матрицу некоторой СЛУ, а любой данный вектор $\boldsymbol{b}$ – ее решением. Тогда правая часть $\boldsymbol{c}$ нашей системы $\mathbf{A}_{m*n}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, т.е. результат умножения $\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}_i)$, где $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, на $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, найдется по (5.1) как:

$$\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{a}_i\ . \tag{5.6}$$

Так, $\mathbf{A}_{4*2}\,\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \\ -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 9+6 \\ -12-6 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ -18 \\ 8 \end{pmatrix}$, а рассмотренный выше пример 5.1 можно решить так: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6+0 \\ 6-9+0 \\ 10+3+0 \\ 8-3+0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}}}$.

5.6. Запись 5.2 наглядно поясняет происхождение линейных операций над числовыми векторами, перенесенное в дальнейшем на элементы линейного пространства: произведение вектора-столбца на одно и то же число дает новый вектор; сумма векторов-столбцов одной и той же размерности приводит к вектору той же размерности. ▲

§6. Классификация систем линейных уравнений по их решениям

Любое множество (x_j), удовлетворяющее всем уравнениям системы (5.2), называется ее *частным решением*. Система соотношений или соотношение, позволяющее получить *все* частные решения системы линейных уравнений, называют ее *общим решением*.

В дальнейшем мы будем использовать термин «*решение*», уточняя, если это потребуется, является ли оно частным или же общим.

Множество решений СЛУ может оказаться пустым, и тогда СЛУ называют *несовместной*. Для несовместных систем, используя для обозначения общего решения вектор $\boldsymbol{x}$, будем писать $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\varnothing}$.

Системы, обладающие хотя бы одним решением, называют *совместными*. В силу определения (5.1), $\boxed{\text{любая однородная СЛУ } \mathbf{A}_{m*n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ заведомо совместна}}$, так как имеет очевидное нулевое, или *тривиальное*, решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Остается открытым только вопрос, будет ли это решение единственным.

Среди совместных СЛУ выделяют, в свою очередь, *определенные*, т.е. имеющие ровно одно решение, и *неопределенные*, имеющие более одного решения (точнее, бесконечно много частных решений). Если система определенна, то общее решение системы совпадает с ее единственным частным решением.

▼Замечания

6.1. *Заведомо определенной* является система $\mathbf{E}_{\mathbf{n}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *с единичной матрицей* $\mathbf{E}_{\mathbf{n}}$ *системы* и *произвольной* правой частью $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Запишем ее в виде расширенной матрицы и тогда, поскольку каждая строка р.м. читается как уравнение, имеем:

$$\mathbf{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow (\mathbf{E}\,|\,\boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \cdots & \underline{x}_n & \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{matrix}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \cdots \\ x_n = b_n \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{6.1}$$

Это означает, что вектор $\boldsymbol{x}$, являющийся решением системы $\mathbf{E_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, заведомо находится в правой части р.м., являясь при этом *единственным*.

6.2. В силу произвольности вектора $\boldsymbol{b}$, формула (6.1) дает одно из важнейших свойств единичной матрицы:

$$\boxed{\text{для любого } \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n \text{ имеем } \mathbf{E_n}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.}\ \blacktriangle \qquad (6.2)$$

§7. Метод Гаусса–Жордана и структура общего решения системы уравнений

Равносильные преобразования СЛУ. СЛУ с одинаковыми (неупорядоченными) множествами [частных] решений, т.е. с одним и тем же [общим] решением, называют *эквивалентными*, или *равносильными*, а преобразования, сохраняющие эквивалентность – *равносильными* преобразованиями. Любые *тождественные преобразования – равносильны*. Согласно приведенному определению, *все несовместные системы равносильны*.

Так как каждому i-уравнению системы (5.2) соответствует строка u_i расширенной матрицы вида (5.3.1), а каждой i-строке р.м. – i-уравнение, сформулируем и обоснуем действия над р.м., не нарушающие равносильности соответствующей ей СЛУ:

1° – перестановка любых двух строк р.м. (будем обозначать это как $u_i \leftrightarrow u_j$);

2° – перестановка любых двух столбцов *в левой части* р.м. *вместе с неизвестными* (будем записывать это как $x_i \leftrightarrow x_j$);

3° – умножение любой строки р.м. на любое *ненулевое* число λ ($u_i := \lambda \cdot u_i$);

4° – прибавление к любой строке р.м. произвольной линейной комбинации *других* строк($u_i := u_i + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_i u_i,\ k \neq i$);

5° – вычеркивание из р.м. нулевой строки (если только она сама не представляет всю систему) или строки, пропорциональной другой (ненулевой) строке.

Преобразования 3° и 4° записаны здесь с использованием *оператора присвоения* «**:=**»; выражение $a := b$ читается как «объекту a присваивается значение b», или «a становится равным b».

Правила 1° и 2° вытекают из замечания 5.3. Правила 4° и 3° следуют из аксиоматики действительных чисел. В самом деле, обозначим левые части уравнений через $f_i(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, благодаря чему система (5.2) запишется как $f_i(\boldsymbol{x}) = b_i$, ($i$ = 1, 2,..., m). Тогда для k-уравнения имеем:

$$f_k(\boldsymbol{x}) = b_k \Leftrightarrow f_k(\boldsymbol{x}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \lambda_i b_i = b_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \lambda_i b_i \Leftrightarrow f_k(\boldsymbol{x}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \lambda_i f_i(\boldsymbol{x}) = b_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \lambda_i b_i,$$

$f_k(\boldsymbol{x}) = b_k \Leftrightarrow \lambda \cdot f_k(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot b_k$ для любого $\lambda \neq 0$, что и требовалось показать.

Наконец, правило 5° вытекает из того, что нулевая строка р.м. представляет собой уравнение $\sum\limits_{j=1}^{m} 0 \cdot x_j = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, заведомо верное для любых [упорядоченных] множеств $(x_{j.}) = \boldsymbol{x} \in \mathbf{R^n}$, а из строки, пропорциональной другой, с помощью правил 3° и 4° легко получить уравнение 0 = 0.

Метод Гаусса – Жордана (метод ГЖ). Этот метод является универсальным способом решения и исследования [неоднородной] СЛУ с матрицей произвольной размерности. Цель метода – получить, *используя равносильные преобразования* 1° – 5° расширенной матрицы вида (5.3.1) с *ненулевой* матрицей $\mathbf{A_{m*n}}$, единичную клетку $\mathbf{E_r}$ максимально возможного порядка r. В общем случае имеем:

$$(\mathbf{A_{m*n}} \mid \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c:c|c} \mathbf{E_r} & \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{r*(n-r)}} & \widetilde{\boldsymbol{b}}_{\mathbf{r*1}} \\ \hdashline \Theta_{\mathbf{(m-r)*r}} & \Theta_{\mathbf{(m-r)*(n-r)}} & \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{b}}}_{\mathbf{(m-r)*1}} \end{array}\right). \qquad (7.1)$$

Расширенную матрицу вида (7.1) можно получить, преобразуя любую исходную систему $(\mathbf{A_{m*n}} \mid \boldsymbol{b})$ по следующему алгоритму.

На каждом k-этапе, начиная с k = 0:

1) ищем среди всех a_{ij}, где i и j изменяются от $k + 1$ до m и n соответственно, элемент $a_{ij} \neq 0$; если таковой отсутствует, то получена итоговая матрица вида (7.1) с $r = k$.

2) если $a_{ij} \neq 0$ имеется, то увеличиваем на 1 значение k, и *любой* (из имеющихся в указанной части) $a_{ij} \neq 0$ перемещаем, через преобразования 1º и 2º, на позицию (k, k);

3) обнуляем все элементы k -столбца, кроме самого a_{kk}, одновременно преобразуя все столбцы р.м. номерами $j > k$, т.е. для каждого $i \neq k$ и для всех j от k до n:

- $a_{kj} := a_{kj} / a_{kk}$; $b_k := b_k / a_{kk}$ (k-строка расширенной матрицы делится на a_{kk}) ;
- $a_{ij} := a_{ij} - a_{kj} * a_{ik}$; $b_i := b_i - b_k * a_{ik}$ (из каждой i-строки с $i \neq k$ вычитается k-строка, умноженная на a_{ik}) – тем самым получены клетки $\mathbf{E_k}$ и $\mathbf{\Theta_{(m-k)*k}}$ с $k \le r$, что дает право на переход к п.1) нашего алгоритма.

При наличии определенного опыта реализации метода ГЖ преобразования 1º и 2º (перестановки строк/столбцов) проводят в последнюю очередь или вообще не делают – достаточно получить r различных столбцов матрицы $\mathbf{E_m}$ (поскольку все столбцы матрицы $\mathbf{A}$ – из $\mathbf{R^m}$!). Более того, поскольку строки р.м. можно умножать на любые ненулевые числа, на месте матрицы $\mathbf{E_r}$ в (7.1) может оказаться диагональная матрица $\mathbf{D_r}$ с <u>ненулевыми</u> d_{ii}; однако всегда удобнее иметь вместо $\mathbf{E_r}$ скалярную матрицу $\mathbf{S_r} = s\mathbf{E_r} \neq \Theta$, что дает решение вида $s\boldsymbol{x}$, из которого легко получить и требуемое решение $\boldsymbol{x}$.

Преобразования р.м. рекомендуется записывать с использованием *оператора присвоения* «**:=**». Операторы записывают, начиная *от* символа $\Leftrightarrow$ вниз или вверх, помещают в рамочку и выполняют в порядке их записи.

Рассмотрим реализацию метода ГЖ на примерах.

Пример 7.1 (приведение р.м. системы $\mathbf{A_{4*5}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ к виду (7.1)).

$$
\begin{array}{c} \\ u_1 \to \\ u_2 \to \\ u_3 \to \\ u_4 \to \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 2 & -\mathbf{3} & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 3 & 6 \\ -3 & 13 & -2 & -9 & -9 & -8 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{array}\right) \end{array}
\underset{\boxed{\begin{array}{l} u_3 := u_3 - 3u_1 \\ u_4 := u_4 + u_1 \end{array}}}{\Leftrightarrow}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 2 & -\mathbf{3} & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 3 & 6 \\ -6 & -2 & -8 & 0 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \end{array}
\underset{\boxed{\begin{array}{l} u_4 := u_4 - u_2 \\ u_3 := u_3 + 2u_2 \end{array}}}{\Leftrightarrow}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & \mathbf{1} & 4 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow
$$

$$
\overset{\boxed{\begin{array}{l} u_2 := 3u_2 \\ u_1 := -(u_1 - 5u_2) \end{array}}}{\Leftrightarrow}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 14 & 0 & 18 & 3 & 16 & 32 \\ 9 & \mathbf{3} & 12 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}
\underset{\boxed{x_1 \leftrightarrow x_4}}{\Leftrightarrow}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:ccc|c} \mathbf{3} & 0 & 18 & 14 & 16 & 32 \\ 0 & \mathbf{3} & 12 & 9 & 9 & 18 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.
$$

Здесь $r = 2$, а на месте $\mathbf{E_2}$ нами получена матрица $\mathbf{S_2} = 3\mathbf{E_2}$. ►

Перейдем к анализу итоговой матрицы (7.1), используя для наглядности пример 7.1.

Допустим, что вектор $\tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}_{\mathbf{(m-r)*1}}$ (как нижняя часть вектора $\tilde{\boldsymbol{b}}_{\mathbf{m*1}}$ в правой части итоговой системы) – ненулевой, т.е. итоговая система содержит хотя бы одно уравнение вида $0 = \tilde{b}_k$, где $k \ge r, \tilde{b}_k \neq 0$. Тогда система, что очевидно, *несовместна*: $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\varnothing}$. Именно этот результат мы получили в нашем примере: у нас получено u_3 в виде $0 = 10$ ($0 = \tilde{b}_3 = \tilde{\tilde{b}}_1 \neq 0$).

Если же $\tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}_{\mathbf{(m-r)*1}} = \boldsymbol{0}$ (у нас – за счет удаления третьего уравнения в исходной системе или при $b_3 = -18$) либо $\tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}_{\mathbf{(m-r)*1}}$ вовсе отсутствует ($m = r$), – а это случилось бы при рассмотрении системы, состоящей только из первых двух уравнений, – то система оказывается *совместной,* т.е. имеющей хотя бы одно [частное] решение.

Пример 7.1 (***продолжение***). Так, в случае с $b_3 = -18$, после вычеркивания из р.м. нулевых строк и *переноса трех последних столбцов* в правую часть р.м., мы получили бы (проверьте это!) систему:
$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cc|cccc} x_4 & x_2 & & x_1 & x_3 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 32 & -14 & -18 & -16 \\ 0 & 3 & 18 & -9 & -12 & -9 \end{array}\right) \end{array}.
$$

Это означает, что x_2 и x_4, *связанные* со столбцами матрицы $\mathbf{E_r}$ (*базовые* неизвестные), зависят от неизвестных x_1, x_3, x_5, перенесенных в правую часть р.м. и могущих принимать *любые* [вещественные] значения.

Неизвестные x_k, не связанные со столбцами матрицы $\mathbf{E_r}$, называются *свободными*: $x_k \in R$.

Теперь, последовательно выписывая координаты вектора $3\boldsymbol{x}$ (а нам их нужно иметь ровно 5 – по числу неизвестных), получаем:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 = 3x_1 \\ 3x_2 = 18 - 9x_1 - 12x_3 - 9x_5 \\ 3x_3 = 3x_3 \\ 3x_4 = 32 - 14x_1 - 18x_3 - 16x_5 \\ 3x_5 = 3x_5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 3 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -16 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot x_5 .$$

Именно за счет наличия *свободных неизвестных* наша система имеет сколько угодно (бесконечно много) частных решений. Очевидно, что если x_k – свободное неизвестное, то $c_k = \lambda\, x_k$ (с ненулевым λ) также принимает любые значения из R, т.е. c_k тоже играет роль свободного неизвестного.

Далее, после деления обеих частей на 3 и переобозначения свободных неизвестных, получаем:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 32/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{x_1}{3} + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 3 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{x_3}{3} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -16 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{x_5}{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 32/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 3 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -16 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot c_3 =$$

$$= \boldsymbol{f_0} + \boldsymbol{f_1}\, c_1 + \boldsymbol{f_2}\, c_2 + \boldsymbol{f_3}\, c_3 = \boldsymbol{f_0} + \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{f_j}\, c_j, = \boldsymbol{f_0} + \mathbf{F_{5*3}}\, \boldsymbol{c},$$ где $\boldsymbol{c}$ – произвольный вектор из $\mathbf{R}^3$.

Найденное [общее] решение *неоднозначно* *<u>по форме представления</u>*. Действительно, в нашем примере можно: положить $c_1 = 1/3$, $c_2 = c_3 = 0$ и получить *целочисленный* вектор $\boldsymbol{f}_0$; затем вынести из $\boldsymbol{f}_2$ общий множитель 3 (теперь $c_2 := 3c_2$); наконец, использовать вместо $\boldsymbol{f}_3$ вектор $\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_3$. Тогда решение примет вид:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot c_3 .$$

Можно получить и такое [общее] решение: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot c_3$,

приняв за $\boldsymbol{f}_1$ вектор $(\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_3)/3$, и т.д. ►

Другие формы представления общего решения неопределенной СЛУ можно получать за счет изменения алгоритма получения матрицы требуемого вида (7.1), что может привести к другим множествам базовых и свободных неизвестных.

> В общем случае количество свободных неизвестных составляет $n - r$, и общее решение неоднородной СЛУ $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ как множество всех ее частных решений имеет вид:
>
> $$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f_0} + \sum_{j=1}^{n-r} \boldsymbol{f_j}\, c_j, = \boldsymbol{f_0} + \mathbf{F_{n*(n-r)}}\, \boldsymbol{c} \quad (\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n-r}}), \tag{7.2}$$
>
> где $\boldsymbol{f}_0$ – некоторое частное решение неоднородной системы, т.е. такое, что $\mathbf{A}\, \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{b}$;
> $\boldsymbol{f}_j$ – частные решения приведенной системы, т.е. такие, что $\mathbf{A}\, \boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{0}$.

Итак, при $n \geq r$ система $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является *совместной*, причем из (7.2) следует, что при $n > r$ она *неопределенна*, а при $n = r$ – *определенна* как имеющая *единственное* [частное, оно же общее] решение $\boldsymbol{f}_0$.

Очевидно также, что система $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *заведомо неопределенна*, если $n > m$, т.е. если число неизвестных больше числа уравнений в системе.

Формула (7.2) представляет *структуру общего решения* [совместной] неоднородной системы.

Общее решение неоднородной системы есть сумма любого ее частного решения и общего решения соответствующей ей приведенной системы. ▲

▼Замечания

7.1. Число r (порядок клетки $\mathbf{E_r}$) называется *рангом* матрицы. Возможны обозначения ранга с указанием матрицы, о которой идет речь: $r = r(\mathbf{A})$, или $r = rg(\mathbf{A})$, или $r = r_{\mathbf{A}}$. Итоговое представление (6.3) расширенной матрицы позволяет утверждать, что порядок клетки $\mathbf{E_r}$ не может превосходить меньшую из размерностей матрицы $\mathbf{A}$: $r(\mathbf{A_{m*n}}) \le \min\{m,n\}$.

7.2 (*Теорема Кронекера – Капелли*). Система $\mathbf{A_{m*n}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы, т.е. когда $r(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = r(\mathbf{A})$.

Доказательство этой теоремы следует из того, что итоговая р.м. системы получена *равносильными преобразованиями* и $r(\mathbf{A_{m*n}}) \le r(\mathbf{A_{m*n}} \mid \boldsymbol{b}) \le \min\{m, n+1\}$.

7.3. Представленное в (6.4) множество частных решений $\{\boldsymbol{f}_j\}_{\mathbf{n-r}}$ приведенной системы $\mathbf{A_{m*n}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ называется *фундаментальной системой* [частных] *решений* (ф.с.р.) этой [однородной] системы. Используя множество $\{\boldsymbol{f}_j\}_{\mathbf{n-r}}$ как упорядоченное: $(\boldsymbol{f}_j)_{\mathbf{n-r}} = \mathbf{F_{m*(n-r)}}$, имеем:

$$\boxed{\mathbf{A_{m*n}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \mathbf{F_{m*(n-r)}}\,\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \mathbf{R^{n-r}}}\,. \tag{7.2.1}$$

Ф.с.р. обладает тем свойством, что *произвольная* л.к. входящих в нее векторов также является частным решением системы $\mathbf{A_{m*n}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\mathbf{A}\,(\sum_{j=1}^{n-r} \boldsymbol{f}_j\, c_j) = \sum_{j=1}^{n-r} (\mathbf{A}\,\boldsymbol{f}_j)\, c_j = \sum_{j=1}^{n-r} \boldsymbol{0}\cdot c_j = \boldsymbol{0}.$$

Как следствие, сумма любого частного решения $\boldsymbol{f}_0$ системы $\mathbf{A_{m*n}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ с произвольной л.к. частных решений системы $\mathbf{A_{m*n}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ также является частным решением системы $\mathbf{A_{m*n}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ▲

§8. Проблема линейной независимости векторов и базис в $\mathbf{R^n}$

Вопрос выяснения линейной зависимости или независимости системы $\{\boldsymbol{a}_i\}_{\mathbf{m}}$ числовых векторов $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{R^n}$ (как элементов линейного пространства), сводится, на основании определения 2.1 и его формализации посредством (2.1) и (2.2), к решению однородной СЛУ $\mathbf{A_{n*m}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Если эта СЛУ определенна, т.е. имеет *только нулевое* решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, то рассматриваемая система векторов линейно независима, а если неопределенна – линейно зависима.

Из §7 следует, что система $\mathbf{A_{n*m}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *заведомо неопределенна*, если $m > n$, т.е. если число неизвестных больше числа уравнений в системе. Это означает, что число векторов, составляющих линейно независимую систему, не может быть больше размерности линейного пространства.

Единственность решения системы $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ обеспечивает и единственность решения системы $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ для *любого* $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R^n}$ (достаточно использовать один и тот же алгоритм получения из $\mathbf{A_n}$ клетки $\mathbf{E_n}$). Обратно, единственность решения системы $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ для некоторого $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R^n}$ обеспечивает единственность решения системы $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Поэтому если система векторов, представленная столбцами матрицы $\mathbf{A_n}$, линейно независима и через нее можно любой вектор из $\mathbf{R_n}$, то эта система векторов, на основании определения 2.1, является базисом пространства $\mathbf{R^n}$.

Из представления (7.1) следует, что базис $\mathbf{R^n}$ не может состоять из $r < n$ векторов: в противном случае одно подмножество векторов из $\mathbf{R^n}$ вообще не выражались бы через векторы, из которых сформировался блок $\mathbf{E_r}$ (случай несовместности системы), а другое состояло бы из векторов, $n - r$ координат которых оказались бы найденными неоднозначно.

Базисом пространства $\mathbf{R^n}$ может быть любая линейно независимая система, состоящая ровно из n векторов $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{R^n}$. Иначе говоря, базис в $\mathbf{R^n}$ может быть представлен любой квадратной матрицей $\mathbf{A_n}$ такой, что система $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Пример 8.1. Найти ранг системы векторов-столбцов, представленной матрицей $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, и максимальную (по количеству векторов) линейно независимую подсистему этой системы.

<u>*Решение*</u>. Рассмотрим систему уравнений $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{array}{c} \underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}\ \underline{x_4}\ \underline{x_5} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{u_1:=(u_1-u_2)/2 \\ u_2:=u_2-u_3 \\ u_3:=u_3-u_4}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{u_2:=(u_2+u_1)/2 \\ u_3:=u_3+u_1 \\ u_5:=u_5+u_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \underline{\boldsymbol{x_2}}\ \underline{x_3}\ \underline{\boldsymbol{x_4}}\ \underline{x_5} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2 .$$

Ранг системы векторов (он же – ранг матрицы **A**) равен 3 (число неизвестных минус число свободных неизвестных, или порядок выделенной единичной клетки). Линейно независимыми оказались векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{a}_5$, связанные со столбцами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_5$ матрицы $\mathbf{E_5}$ (здесь порядок матрицы **E** определен размерностью пространства $\mathbf{R}^5$, которому принадлежат векторы $\boldsymbol{a}_i$).

Заметим, что линейно независимыми могут быть и другие *тройки* векторов, что связано с неединственностью алгоритма реализации метода Г-Ж, т.е. с другими парами свободных неизвестных.►

Пример 8.2. Покажем, что система векторов (как упорядоченное множество), представленная столбцами матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, является базисом, и найдем координаты вектора $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Эта задача сводится к решению системы $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Если метод ГЖ приведет к *единственному* решению, то это и будет означать, что данная матрица $\mathbf{A_4}$ представляет один из базисов пространства $\mathbf{R}^4$. Проведем соответствующие выкладки:

$$\begin{array}{c} \ \underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}\ \underline{x_4} \\ \begin{array}{c} u_1 \to \\ u_2 \to \\ u_3 \to \\ u_4 \to \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 14 \\ -1 & 0 & 1 & -\mathbf{1} & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{u_1:=u_1+u_3 \\ u_2:=u_2+3u_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}\ \underline{x_4} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{u_1:=u_1/2 \\ u_3:=-u_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}\ \underline{x_4} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{u_2:=u_2-3u_1 \\ u_4:=u_4-u_1}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}\ \underline{x_4} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -\mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array} \overset{\substack{u_3:=u_3+u_2 \\ u_4:=u_4-2u_1}}{\underset{u_2:=-u_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}\ \underline{x_4} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) \end{array} \overset{\substack{u_1:=u_1+u_4 \\ u_3:=u_3+u_4}}{\underset{\substack{u_2:=u_2-2u_4 \\ u_4:=-u_4}}{\Longleftrightarrow}} \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}\ \underline{x_4} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}}.$$

<u>*Проверка*</u>. С учетом замечания 5.3 имеем:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4+\ \ 5-2 \\ 16-6+10-6 \\ -8+\ 0+\ \ 5+2 \\ -16-2+20+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}, \text{ что и требовалось показать.}$$

Таким образом, данная по условию матрица $\mathbf{A_4}$ представляет *один из базисов* пространства $\mathbf{R}^4$, а координаты полученного вектора $\boldsymbol{x}$ называются координатами вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе.

Более того, матрицы системы, получаемые на любом промежуточном этапе преобразований, также представляют базисы в $\mathbf{R}^4$, в каждом из которых вектор $\boldsymbol{b}$ будет иметь те же координаты. Из каждого такого базиса перестановкой векторов можно получить еще $4! - 1 = 23$ других базиса, что повлечет не более чем соответствующие (перестановке векторов базиса) перестановки координат вектора $\boldsymbol{b}$. Простейшим из всех базисов будет базис, представляемый матрицей $\mathbf{E}$ (будем называть его $\mathbf{E}$-базисом). ►

▼Замечания

8.1. Матрица $\mathbf{A_n}$ предоставляет базис пространства $\mathbf{R^n}$ тогда и только тогда, когда $r(\mathbf{A}) = n$.

8.2. Ф.с.р. системы $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, т.е. система $\{\boldsymbol{f}_j\}_{\mathbf{n-r}}$, образующая матрицу $\mathbf{F_{m*(n-r)}}$, является *линейно независимой* по ее построению. Действительно, наличие $n - r$ свободных неизвестных в системе $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ обеспечивает наличие единичной клетки $\mathbf{E_{n-r}}$ для системы $\mathbf{F_{m*(n-r)}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, т.е. единственность нулевого решения последней. Тогда любое *частное* решение неопределенной СЛУ можно представить в виде *единственной* л.к. векторов ф.с.р.

Более того, любая *линейно независимая* система $\{\boldsymbol{f}_j\}_{\mathbf{n-r}}$ частных решений системы $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, т.е. векторов $\boldsymbol{f}_j$ таких, что $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{0}$, также является ф.с.р. системы $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (см. замечание 6.3.3).

8.3. Рассмотрим СЛУ $\mathbf{A_n}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ с матрицей, представляющей базис пространства $\mathbf{R^n}$. Система, таким образом, определенна, и метод ГЖ дает:

$$\mathbf{A_n}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A_n} \mid \boldsymbol{b}) \;\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow\; (\mathbf{E_n} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}) \;\Leftrightarrow\; \begin{Bmatrix} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \dots\dots \\ x_n = b_n \end{Bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{E_n} \mid \boldsymbol{x}). \qquad (8.1)$$

Итак, можно записать: $(\mathbf{A_n}|\boldsymbol{b}) \;\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow\; (\mathbf{E_n}|\boldsymbol{x})$, т.е. если на месте матрицы $\mathbf{A_n}$ системы получена единичная матрица $\mathbf{E_n}$, то на месте вектора $\boldsymbol{b}$ в правой части р.м. оказывается решение $\boldsymbol{x}$ исходной системы.

8.5. Согласно замечанию 5.5, проверку правильности решения определенной СЛУ можно проводить, опираясь на векторное представление системы в виде (5.1). Так, в примере 8.1 линейная комбинация векторов-столбцов $\boldsymbol{a}_i$ матрицы $\mathbf{A}$ с найденными коэффициентами x_i действительно дает правую часть системы:

$$8\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + 5\boldsymbol{a}_3 - 2\boldsymbol{a}_4 = 8\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4+5-2 \\ 16-6+10-6 \\ -8+0+5+2 \\ -16-2+20-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. ▲$$

§9. Умножение матриц и матричные уравнения

Рассмотрим систему $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{b}$ – произвольный вектор из $\mathbf{R^m}$. Для каждого $\boldsymbol{b}$ мы будем получать свое решение $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R^n}$, пусть даже $\boldsymbol{x} \in \varnothing$. Возьмем p векторов $\boldsymbol{b}_j$, (которые образуют матрицу $\mathbf{B_{m*p}}$), и тогда получим столько же решений $\boldsymbol{x}_j$ (которые составят матрицу $\mathbf{X_{n*p}}$). Это означает, что можно записать *матричное уравнение*:

$$\mathbf{A_{m*n}} \cdot \mathbf{X_{n*p}} = \mathbf{B_{m*p}}. \qquad (9.1)$$

По аналогии с (5.2.1), для каждого i-уравнения каждой j- системы $\mathbf{A_{m*n}}\, \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_j$ можно записать $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = b_{ij}$, что означает использование для решения уравнения (9.1) расширенной матрицы вида $(\mathbf{A_{m*n}} \mid \mathbf{B_{m*p}})$. В этом случае реализация метода ГЖ сводится к одновременному решению p систем уравнений с одной и той же матрицей $\mathbf{A_{m*n}}$.

Матричное уравнение вида (9.1) также может служить определением операции *умножения матрицы на матрицу*. Обычно его записывают как

$$\boxed{\mathbf{A_{m*n}} \cdot \mathbf{B_{n*p}} = \mathbf{C_{m*p}} \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ для всех } i = 1,\ldots, m,\; j = 1,\ldots, p.} \qquad (9.2)$$

Учитывая замечание 5.2, можно видеть, что $c_{ij} = (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})_i \cdot \boldsymbol{b}_{j\cdot}$, где $(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})_i$ – i-столбец матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Именно поэтому при непосредственном умножении матриц *левый* сомножитель рекомендуется записывать через транспонированную матрицу.

Основываясь на определении (5.6), приведенном в замечании 5.5, можно понимать матрицу $\mathbf{C}_{m*p} = \mathbf{A}_{m*n} \cdot \mathbf{B}_{n*p}$ как упорядоченное множество векторов-столбцов:

$$\boxed{\mathbf{C}_{m*p} = (\boldsymbol{c}_j), \text{ где } \boldsymbol{c}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\boldsymbol{a}_i,\ j = 1,\dots,p.} \tag{9.3}$$

Пример 9.1 (проверка правильности решения системы из продолжения примера 7.1 с $b_3 = -18$). Возьмем последнее из полученных общих решений:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-3\\0\\-2\\-4\end{pmatrix}\cdot c_1 + \begin{pmatrix}0\\-4\\1\\-6\\0\end{pmatrix}\cdot c_2 + \begin{pmatrix}3\\0\\0\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot c_3 = \boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}_1 c_1 + \boldsymbol{f}_2 c_2 + \boldsymbol{f}_3 c_3$$

и составим из векторов $\boldsymbol{f}_i$ матрицу $\mathbf{F}_{5*4}$. Произведение $\mathbf{A}_{4*5}\,\mathbf{F}_{5*4}$ должно дать матрицу $\mathbf{C}_{4*4}$ такую, что ее i-столбцы суть ожидаемые произведения $\mathbf{A}\boldsymbol{f}_i$, т.е. вектор $\boldsymbol{b}$ для $i = 0$ и $\boldsymbol{0}$-вектор для всех других i. У нас именно так и получается:

$$\mathbf{A}_{4*5}\,\mathbf{F}_{5*4} = \begin{pmatrix}1&3&-3&2\\5&1&13&-4\\2&4&-2&2\\-3&0&-9&3\\-1&3&-9&4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix}1&5&0&3\\3&-3&-4&0\\0&0&1&0\\6&-2&-6&2\\0&-4&0&-3\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{r:r:r:r} 1+15+0-18+0 & 5-15+0+6+4 & 0-20+2+18+0 & 3+0+0-6+3\\ 3+3+0+0+0 & 15-3+0+0-12 & 0-4+4+0+0 & 9+0+0+0-9\\ -3+39+0-54+0 & -15-39+0+18+36 & 0-52-2+54+0 & -9+0+0-18+27\\ 2-12+0+18+0 & 10+12+0-6-16 & 0+16+2-18+0 & 6+0+0+6-12 \end{array}\right) = \begin{pmatrix}-2&0&0&0\\6&0&0&0\\-18&0&0&0\\8&0&0&0\end{pmatrix} = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}).$$

Эту же проверку можно провести, опираясь на (9.3):

$$\mathbf{A}_{4*5}\,\mathbf{F}_{5*4} = \begin{pmatrix}1&5&2&-3&-1\\3&1&4&0&3\\-3&13&-2&-9&-9\\2&-4&2&3&4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&5&0&3\\3&-3&-4&0\\0&0&1&0\\6&-2&-6&2\\0&-4&0&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2+6\boldsymbol{a}_4\\5\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_4-4\boldsymbol{a}_5\\-4\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3-6\boldsymbol{a}_4\\3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_4-3\boldsymbol{a}_5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left(\begin{array}{r:r:r:r} 1+15-18 & 5-15+6+4 & -20+2+18 & 3-6+3\\ 3+3+0 & 15-3+0-12 & -4+4+0 & 9+0-9\\ -3+39-54 & -15-39+18+36 & -52-2+54 & -9-18+27\\ 2-12+18 & 10+12-6-16 & +16+2-18 & 6+6-12 \end{array}\right) = \begin{pmatrix}-2&0&0&0\\6&0&0&0\\-18&0&0&0\\8&0&0&0\end{pmatrix} = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}).\ \blacktriangleright$$

Из (9.2) и свойств сумм вытекает, что для любых чисел $\alpha_k \in R$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \mathbf{A}_k\right)\cdot\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot(\mathbf{A}_k\mathbf{B}),$$

$$\mathbf{A}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \mathbf{B}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot(\mathbf{A}\mathbf{B}_k),$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_k$ – матрицы одних и тех же размерностей, оговоренных в (9.2).

В частности, $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \alpha(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

Переставлять местами сомножители в произведении формально допустимо только при $m = p = n$. В то же время, и в общем случае даже для квадратных матриц одного порядка, *операция умножения не перестановочна*. Для доказательства этого утверждения достаточно привести всего лишь один пример:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}, \text{ но } \mathbf{BA} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix} \neq \mathbf{AB}.$$

$$\boxed{\text{Матрицы } \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{B} \text{ такие, что } \mathbf{AB} = \mathbf{BA}, \text{ называются \textit{перестановочными}.}} \tag{9.4}$$

Используя (9.2), легко получить: $\mathbf{\Theta A} = \mathbf{A\Theta} = \mathbf{\Theta}$, $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$: матрицы $\mathbf{E}$ (единичная) и $\mathbf{\Theta}$ (нулевая) порядка n перестановочны с любой матрицей $\mathbf{A}$ того же порядка. Отыскание же всех других матриц, перестановочных с $\mathbf{A}$, сводится к решению матричного уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, о чем мы будем говорить в §10.

Умножение транспонированной матрицы на исходную. Пусть дана матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}} = (a_{ij})$. Тогда транспонированной для нее будет матрица $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{\mathbf{n*m}} = (a'_{ij})$, где $a'_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j. Согласно формуле (9.2), имеем:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{\mathbf{n*m}}\, \mathbf{A}_{\mathbf{m*n}} = \mathbf{G}_{\mathbf{n*n}} \Leftrightarrow g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} a_{ki} = g_{ji}\,. \tag{9.5}$$

Это означает, что умножение $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}$ всегда возможно и дает квадратную симметрическую матрицу $\mathbf{G}_{\mathbf{n}}$ с элементами $g_{ij} = g_{ji} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}_{i}{\cdot}\boldsymbol{a}_j$. С учетом обозначения (5.5.1) для скалярного произведения векторов-столбцов (замечание 5.2), $g_{ij} = g_{ji} = \boldsymbol{a}_i{\cdot}\boldsymbol{a}_j$. Матрица, составленная из таких скалярных произведений, называется ***матрицей Грама***, построенной на [упорядоченной] системе $(\boldsymbol{a}_i)_{\mathbf{n}}$ принадлежащих пространству $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ векторов, т.е. на матрице $\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}$. Будем обозначать такую матрицу как $\mathbf{G}_{\mathbf{n}} = \mathbf{G}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}})$.

Пример 9.2. Найдем $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{F}$ для $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, т.е. для одной из ф.с.р., полученной при решении приведенной системы $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ из примера 7.1. Записывать левый сомножитель $(\mathbf{F}^{\mathrm{T}})$ *явно* здесь не имеет никакого смысла, ибо алгоритм $g_{ij} = g_{ji} = \boldsymbol{f}_i{\cdot}\boldsymbol{f}_j$ легко реализуется с использованием самой матрицы $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{F}_{\mathbf{5*3}} = \left(\begin{array}{c:c:c} 25+9+9+4+16 & 0+12+0+12+0 & 15+0+0-4+12 \\ 24 & 0+16+1+36+0 & 0+0+0-12+0 \\ 23 & -12 & 9+0+0+4+9 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 63 & 24 & 23 \\ 24 & 43 & -12 \\ 23 & -12 & 22 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_3. \ \blacktriangleright$$

Транспонирование произведения матриц. Для <u>*квадратных*</u> матриц $\mathbf{A}_{\mathbf{n}} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B}_{\mathbf{n}} = (b_{ij})$ имеем $\mathbf{AB} = \mathbf{C}_{\mathbf{n}} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Тогда элементы c'_{ij} матрицы $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ находятся как

$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}$, т.е.

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \boxed{(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}. \tag{9.6}$$

Как следствие, для *симметрических* матриц $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{BA}$. Кроме того, легко показать, что

$$\boxed{(\mathbf{ABC})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}. \tag{9.7}$$

§10. Решение матричных уравнений

В этом параграфе рассматриваются способы решения матричных уравнений вида $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{XA} = \mathbf{BX}$ (в том числе уравнения $\mathbf{XA} = \mathbf{AX}$), основанные на использовании метода Гаусса – Жордана.

1. ***Уравнение*** $\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}\, \mathbf{X}_{\mathbf{n*p}} = \mathbf{B}_{\mathbf{m*p}}$ распадается на p систем вида $\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}\, \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_j$. Если *хотя бы одна* из этих систем несовместна, то уравнение $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} \in \boldsymbol{\varnothing}$. Если же *все* указанные системы определенны, то уравнение имеет единственное решение. Совместность всех систем *при наличии хотя бы одной неопределенной* приводит к неопределенности уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Для решения уравнения используется метод ГЖ с расширенной матрицей вида $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})$. Все системы $\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}\, \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_j$ имеют одну и ту же матрицу $\mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}$, поэтому все они будут совместны (а уравнение $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ будет иметь хотя бы одно решение) только в случае, когда $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$. Заметим, что при работе с р.м. $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})$ неизвестные следует обозначать как $\underline{x}_{ij}$, где j – номер *столбца* матрицы $\mathbf{B}$ (номер системы), i – номер неизвестного.

Пример 10.1. Решим уравнение: $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 42 & -4 & -15 \\ -14 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Метод ГЖ дает:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \underline{x}_{1j} & \underline{x}_{2j} \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \end{array} & \left(\begin{array}{cc|ccc} 6 & 5 & 42 & -4 & -15 \\ -2 & -1 & -14 & 0 & 7 \end{array}\right) \end{array} \xLeftrightarrow{\boxed{\begin{array}{l} u_1 := u_1 + 5u_2 \\ u_2 := -u_2 \end{array}}} \left(\begin{array}{cc|ccc} -4 & 0 & -28 & -4 & 20 \\ 2 & 1 & 14 & 0 & -7 \end{array}\right) \xLeftrightarrow{\boxed{\begin{array}{l} u_1 := -u_1/4 \\ u_2 := u_2 - 2u_1 \end{array}}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \underline{x}_{1j} & \underline{x}_{2j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Здесь система позволила нам получить на месте $\mathbf{A}_2$ матрицу $\mathbf{E}_2$; решение – единственно.

$\underline{\textit{Проверка}}$: $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42+0 & 6-10 & -30+15 \\ -14+0 & -2+2 & 10-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & -4 & -15 \\ -14 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$.▶

Пример 10.2. Решим уравнение: $\mathbf{A}_{4*3}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}_{4*2}$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \\ -6 & 3 \\ 23 & -8 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{l} \\ u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \\ u_3 \rightarrow \\ u_4 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x}_{1j} & \underline{x}_{2j} & \underline{x}_{3j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -6 & 3 \\ 5 & -3 & 8 & 23 & -8 \end{array}\right) \end{array} \overset{\begin{array}{l} u_3 := u_3 + 2u_1 \\ u_4 := u_4 - 3u_1 \end{array}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 8 & -2 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{l} u_3 := u_3 - u_2 \\ u_4 := u_4 - 2u_2 \\ u_1 := -u_1 \end{array}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & -2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \underset{u_1 := u_1 + 2u_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x}_{1j} & \underline{x}_{2j} & \underline{x}_{3j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underline{x}_{2j} & \underline{x}_{3j} & & & \underline{x}_{1j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Каждый вектор $\boldsymbol{x}_j$ связан с соответствующим вектором $\boldsymbol{b}_j$, в силу чего свободные неизвестные x_{1j} тоже различны (независимы). В нашем случае получаем:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot c_1 \text{ и } \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot c_2, \text{ где } c_1, c_2 \in R.$$

Это дает искомую матрицу $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{3*2} = \begin{pmatrix} 0 + c_1 & 0 + c_2 \\ 3 - c_1 & 0 - c_2 \\ 4 - c_1 & -1 - c_2 \end{pmatrix}$, где $c_1, c_2 \in R$.

Проверим результат:

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 0 + c_1 & 0 + c_2 \\ 3 - c_1 & 0 - c_2 \\ 4 - c_1 & -1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 3 + c_1 + 8 - 2c_1 & c_2 + c_2 - 2 - 2c_2 \\ c_1 + 0 + 0 + 4 - c_1 & c_2 + 0 - 1 - c_2 \\ -c_1 + 6 - 2c_1 - 12 + 3c_1 & -c_2 - 2c_2 + 3 + 3c_2 \\ 5c_1 - 9 + 3c_1 + 32 - 8c_1 & 5c_2 + 3c_2 - 8 - 8c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \\ -6 & 3 \\ 23 & -8 \end{pmatrix},$$

т.е. матрица **X** найдена верно. ▶

2. ***Уравнение*** $\mathbf{X}_{\mathbf{m*n}}\,\mathbf{A}_{\mathbf{n*p}} = \mathbf{B}_{\mathbf{m*p}}$ имеет матрицу-неизвестное *левым* сомножителем. Будем решать его как $\mathbf{XA} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. С одной стороны, здесь можно искать $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ так, как это делалось в примерах 9.3.1 и 9.3.2, т.е. используя р.м. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mid \mathbf{B}^{\mathrm{T}})$. С другой стороны, действия со строками расширенной матрицы для отыскания $\mathbf{Y}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ равносильны действиям над столбцами матриц **A** и **B**. Поэтому можно записать *расширенную* матрицу исходной системы в виде $\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right)$ и получать на месте матрицы **A** единичную клетку $\mathbf{E}_{\mathbf{r}}$, где $r = r(\mathbf{A})$, *действуя* не со строками, а *со столбцами* этой расширенной матрицы. Для обозначения неизвестных $\underline{x}_i$ теперь используются $\underline{x}_{ij}$, где i – номер *строки* матрицы **B**, j – номер неизвестного. Уравнения читаются по вертикали. Для указания последовательности преобразований столбцы расширенной матрицы обозначают как v_i.

Рекомендуется использовать второй способ *только для решения уравнений с квадратной матрицей* $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$ при $r(\mathbf{A}) = n$.

Пример 10.3. Решим уравнение $\mathbf{X}_{3*2}\,\mathbf{A}_{2*2} = \mathbf{B}_{3*2}$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 14 & 26 \\ -11 & -19 \end{pmatrix}$.

Имеем: $\mathbf{XA} = \mathbf{B} \Leftrightarrow$
$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \underline{x}_{j1} & \underline{x}_{j2} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 3 & 5 \\ -2 & -4 \\ \hline -3 & -5 \\ 14 & 26 \\ -11 & -19 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{array} \end{array} \overset{v_2 := v_2 - 2v_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ \hline -3 & 1 \\ 14 & -2 \\ -11 & 3 \end{array}\right) \overset{v_1 := v_1 + 3v_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 8 & -2 \\ -2 & 3 \end{array}\right) \overset{(-v_1/2) \leftrightarrow (-v_2)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{array}\right) = \left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{X}}\right) \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Проверка</u>: **XA**= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+0 & -5+0 \\ 6+8 & 10+16 \\ -9-2 & -15-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 14 & 26 \\ -11 & -19 \end{pmatrix}$ = **B**. ►

Пример 10.4. Решим уравнение: $\mathbf{X}_{2*3}\,\mathbf{A}_{3*2} = \mathbf{B}_{2*2}$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Поскольку матрица **A** не является квадратной, то используем первый способ. Запись через $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, дает:

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \to \\ u_2 \to \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_{1j} & y_{2j} & y_{3j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & -5 & -4 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \qquad\qquad\quad b_1 & b_2 \end{array} \end{array} \overset{\boxed{u_2 := u_2 - 2u_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -10 & 4 \end{array}\right) \overset{\boxed{u_1 := u_1 + 3u_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -2 & 0 & -27 & 11 \\ -1 & 0 & 1 & -10 & 4 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{l} u_1 := -u_1 \\ u_2 := 2u_2 \end{array}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_{1j} & y_{2j} & y_{3j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 0 & 27 & -11 \\ -2 & 0 & 2 & -20 & 8 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_{2j} & y_{3j} & & \qquad\qquad y_{1j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 27 & -11 & 0 \\ 0 & 2 & -20 & 8 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \qquad f_{01} & f_{02} \end{array} \end{array}.$$

Прочтение уравнений для j = 1,2 дает $\begin{cases} 2y_{11} = 0 + 2\cdot y_{11} \\ 2y_{21} = 27 + 0\cdot y_{11} \\ 2y_{31} = -20 + 2\cdot y_{11} \end{cases}$ и $\begin{cases} 2y_{12} = 0 + 2\cdot y_{12} \\ 2y_{22} = -11 + 0\cdot y_{12} \\ 2y_{32} = -8 + 2\cdot y_{12} \end{cases}$ ($y_{11}, y_{12} \in R$).

Переобозначая $y_{11} = c_1 \in R$, $y_{12} = c_2 \in R$, получаем матрицу $2\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 + 2\cdot c_1 & 0 + 2\cdot c_2 \\ 27 + 0\cdot c_1 & -11 + 0\cdot c_2 \\ -20 + 2\cdot c_1 & 8 + 2\cdot c_2 \end{pmatrix}$.

Тогда $\mathbf{X} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} = \left(\begin{array}{c:c:c} c_1 & 27/2 & -10 + c_1 \\ c_2 & -11/2 & 4 + c_2 \end{array}\right)$, где $c_1, c_2 \in R$.

<u>Проверка</u>:

$$\mathbf{XA} = \left(\begin{array}{c:c} c_1 & c_2 \\ 27/2 & -11/2 \\ -10 + c_1 & 4 + c_2 \end{array}\right)^{\mathbf{T}} \cdot \left(\begin{array}{c:c} 3 & 5 \\ -2 & -4 \\ -3 & -5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 3c_1 - 27 + 30 - 3c_1 & 5c_1 - 54 + 50 - 5c_1 \\ 3c_2 + 11 - 12 - 3c_2 & 5c_2 + 22 - 20 - 5c_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}. ►$$

3. ***Решение матричных уравнений вида*** **XA = BX.** Такие уравнения возникают при решении многих задач линейной алгебры. В частности, отыскание *всех* матриц, перестановочных с **A**, сводится, согласно определению (7.3), к решению уравнения **XA = AX**, т.е. уравнения **XA = BX** с **B = A**.

Запишем уравнение **XA = BX** (имеющее, кстати, смысл только для квадратных матриц – проверьте это!) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \ldots x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} \ldots x_{n2} \\ \hdashline x_{1n} & x_{2n} \ldots x_{nn} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \ldots b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} \ldots b_{n2} \\ \hdashline b_{1n} & b_{2n} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \ldots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \ldots x_{2n} \\ \hdashline x_{n1} & x_{n2} \ldots x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем систему из n^2 уравнений u_{ij} с n^2 неизвестными, которую мы запишем с выделением характерных клеток:

$$\begin{array}{c} \\ u_{11} \to \\ u_{12} \to \\ \ldots\ldots \\ u_{1n} \to \\ u_{21} \to \\ u_{22} \to \\ \ldots\ldots \\ u_{2n} \to \\ \ldots\ldots \\ u_{n1} \to \\ u_{n2} \to \\ \ldots\ldots \\ u_{nn} \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} \underline{x}_{11} & \underline{x}_{12} & \ldots & \underline{x}_{1n} & \underline{x}_{21} & \underline{x}_{22} & \ldots & \underline{x}_{2n} & \ldots & \underline{x}_{n1} & \underline{x}_{n2} & \ldots & \underline{x}_{nn} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:cccc:c:cccc} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} \underline{x}_{11} & \underline{x}_{12} & \underline{x}_{1n} & \underline{x}_{21} & \underline{x}_{22} & \ldots & \underline{x}_{2n} & \ldots & \underline{x}_{n1} & \underline{x}_{n2} & \ldots & \underline{x}_{nn} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:cccc:c:cccc} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & b_{12} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{11} & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_{1n} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{11} & 0 & 0 & \cdots & b_{12} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{1n} \\ \hdashline b_{21} & 0 & \cdots & 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{21} & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_{2n} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{21} & 0 & a_0 & \cdots & b_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \hdashline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hdashline b_{n1} & 0 & \cdots & 0 & b_{n2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n1} & \cdots & 0 & 0 & b_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_{nn} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n1} & 0 & 0 & \cdots & b_{n2} & \cdots & 0 & a_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) \end{array}.$$

После переноса правой части в левую получаем СЛУ $\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ с квадратной матрицей $\mathbf{T}$ порядка n^2 клеточной структуры, клетки $\widetilde{\mathbf{T}}_{ij}$ которой являются квадратными матрицами порядка n: $\widetilde{\mathbf{T}}_{ij} = \left[\begin{array}{ll} -b_{ji}\mathbf{E}, & \text{если } j \neq i \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - b_{ij}\mathbf{E}, & \text{если } j = i. \end{array}\right.$.

Таким образом, уравнение $\mathbf{XA} = \mathbf{BX}$ равносильно однородной СЛУ с расширенной матрицей:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x}_{11} \ldots \underline{x}_{1n} & \underline{x}_{21} \ldots \underline{x}_{2n} & \ldots & \underline{x}_{n1} \ldots \underline{x}_{nn} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c:c:c:c|c} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{S}_{11} & -\mathbf{S}_{12} & \cdots & -\mathbf{S}_{nn} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline -\mathbf{S}_{21} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{S}_{22} & \cdots & -\mathbf{S}_{2n} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline -\mathbf{S}_{1n} & -\mathbf{S}_{2n} & \cdots & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{S}_{nn} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \end{array}, \tag{10.1}$$

где $\mathbf{S}_{ij} = b_{ij}\mathbf{E}$ – скалярные матрицы, построенные на элементах матрицы $\mathbf{B}$.

Пример 10.5. Найдем все матрицы, перестановочные с $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Задача имеет два очевидных решения: $\mathbf{X} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Theta}$. Все другие (нетривиальные) решения, если они есть, будем искать из уравнения $\mathbf{XA} = \mathbf{AX}$. Для этого записываем расширенную матрицу вида (10.1) с $\mathbf{S}_{ij} = a_{ij}\mathbf{E}$ и применяем метод ГЖ для решения полученной системы $\mathbf{T}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

Цель первого этапа преобразований – оставить ненулевым только один блок $\widetilde{\mathbf{T}}_{23}$ (в данном случае это наиболее эффективно):

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccccc} \underline{x}_{11} & \underline{x}_{12} & \underline{x}_{13} & \underline{x}_{21} & \underline{x}_{22} & \underline{x}_{23} & \underline{x}_{31} & \underline{x}_{32} & \underline{x}_{33} \end{array} \\ \begin{array}{r} u_{11} \to \\ u_{12} \to \\ u_{13} \to \\ u_{21} \to \\ u_{22} \to \\ u_{23} \to \\ u_{31} \to \\ u_{32} \to \\ u_{33} \to \end{array} & \left(\begin{array}{rrr:rrr:rrr|r} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -5 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hdashline -2 & 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hdashline -3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u_{1i} := u_{1i} - 3u_{2i} \\ u_{2i} := -u_{2i} \\ (i = 1, 2, 3) \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} u_{31} := u_{31} - u_{21} + 2u_{22} + 3u_{23} \\ u_{32} := u_{32} - 2u_{21} - 6u_{22} - 5u_{23} \\ u_{33} := u_{33} + 3u_{21} + u_{22} \end{array}}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr:rrr:rrr|r} 6 & 2 & 3 & -13 & -6 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 6 & 2 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & -9 & -3 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & -5 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -1 & -4 & -6 & 5 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 10 & -13 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & 13 & 6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Очевидно, что все преобразования требуют особой внимательности, поскольку любая ошибка, допущенная на текущем этапе, может существенно повлиять на итоговый результат. Ниже мы будем показывать проводимые операции слева от соответствующих строк-уравнений, сохраняя их начальную нумерацию и памятуя о том, что в правой части операторов используются элементы, полученные на предыдущем этапе.

Выбирая теперь ведущими единичные элементы (они выделены жирным шрифтом) в первой или третьей полосах, получаем:

$$\begin{array}{r} \\ \\ u_{13} := u_{13} + u_{12} \\ \\ \\ \\ \\ u_{32} := u_{32} - u_{11} \\ u_{33} := u_{33} + u_{11} \end{array} \left(\begin{array}{rrr:rrr:rrr|r} 6 & 2 & 3 & -13 & -6 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 6 & 2 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 2 & 2 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & -5 & -2 & -3 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & -6 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \hdashline -1 & -4 & -6 & 5 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 7 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{r} u_{11} := u_{11} - 6\,u_{13} \\ u_{12} := u_{12} + 2\,u_{13} \\ \\ u_{21} := u_{21} - 2u_{13} \\ \\ \\ u_{31} := (u_{31} + 2\,u_{13})/2 \\ u_{32} := u_{32} + 2\,u_{13} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr:rrr:rrr|r} 0 & -10 & -9 & 5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 2 & 2 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -4 & -4 & 1 & 0 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & -6 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \hdashline 0 & -1 & -2 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{array}{r} u_{11}:=u_{11}-5u_{31} \\ \\ u_{13}:=u_{13}+3u_{31} \\ u_{21}:=u_{21}-u_{31} \\ u_{22}:=u_{22}-2u_{31} \\ u_{23}:=u_{23}+3u_{31} \\ \\ u_{32}:=-(u_{32}+6u_{31}) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc|c} 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -1 & -4 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & -3 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \hdashline 0 & -1 & -2 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccccc} \underline{x}_{11} & \underline{x}_{12} & \underline{x}_{13} & \underline{x}_{21} & \underline{x}_{22} & \underline{x}_{23} & \underline{x}_{31} & \underline{x}_{32} & \underline{x}_{33} \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ \\ u_{13}:=u_{13}+4u_{32} \\ u_{21}:=u_{21}+2u_{32} \\ u_{22}:=u_{22}-4u_{32} \\ u_{23}:=u_{23}+4u_{32} \\ u_{31}:=u_{31}+2u_{32} \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -21 & 0 & 0 & -1 & -47 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & -29 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 53 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 0 & 0 & -1 & -52 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \hdashline 0 & -11 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Таким образом, свободными оказались неизвестные $x_{12} = c_1$, $x_{22} = c_2$, $x_{23} = c_3$. Переносим их в правую часть р.м. (с учетом знаков) и заполняем искомую матрицу:

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{c:c:c} 21c_1 + c_2 + 47c_3 & c_1 & 5c_1 \quad +13c_3 \\ 11c_1 \quad + 24c_3 & c_2 & c_3 \\ 13c_1 \quad + 29c_3 & -24c_1 \quad -53c_3 & 23c_1 + c_2 + 52c_3 \end{array}\right), \text{ где все } c_i \in R.$$

Проверку полученного результата удобно проводить через сравнение произведений **AX** и **XA**. Непосредственное умножение требует определенных усилий, но тем не менее (проверьте это!) дает:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \left(\begin{array}{c:c:c} 38c_1 + c_2 + 86c_3 & -71c_1 - 2c_2 - 159c_3 & 74c_1 + 3c_2 + 167c_3 \\ 11c_1 + 2c_2 + 27c_3 & -22c_1 - 4c_2 - 53c_2 & 33c_1 + c_2 + 74c_3 \\ 34c_1 + 3c_2 + 79c_3 & -45c_1 - 5c_2 - 106c_3 & 61c_1 + 2c_2 + 138c_3 \end{array}\right).$$

Можно упростить проверку, представив матрицу **X** в виде суммы трех матриц:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 21 & 1 & 5 \\ 11 & 0 & 0 \\ 13 & -24 & 23 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} 47 & 0 & 13 \\ 24 & 0 & 5 \\ 29 & -53 & 52 \end{pmatrix} \cdot c_3$$

(при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ получаем $\mathbf{X} = \mathbf{\Theta}$, а при $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = 1$ – матрицу $\mathbf{X} = \mathbf{E}$). Теперь:

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 21 & 1 & 5 \\ 11 & 0 & 0 \\ 13 & -24 & 23 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 47 & 0 & 13 \\ 24 & 0 & 1 \\ 29 & -53 & 52 \end{pmatrix} \cdot c_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & -71 & 74 \\ 11 & -22 & 33 \\ 34 & -45 & 61 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} 86 & -159 & 167 \\ 27 & -53 & 74 \\ 79 & -106 & 138 \end{pmatrix} \cdot c_3,$$

$$\mathbf{XA} = \begin{pmatrix} 21 & 11 & 13 \\ 1 & 0 & -24 \\ 5 & 0 & 23 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} 47 & 24 & 29 \\ 0 & 0 & -53 \\ 13 & 5 & 52 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot c_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & -71 & 74 \\ 11 & -22 & 33 \\ 34 & -45 & 61 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} 86 & -159 & 167 \\ 27 & -53 & 74 \\ 79 & -106 & 138 \end{pmatrix} \cdot c_3 = \mathbf{AX}. \ \blacktriangleright$$

▼**Замечание 10.** Учитывая возможность умножения уравнения $\mathbf{T}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ на –1, при составлении р.м. $(\mathbf{T} \,|\, \boldsymbol{0})$ можно использовать клетки вида $\tilde{\mathbf{T}}_{ij} = \left[\begin{array}{ll} \mathbf{S}_{ij}, & \text{если } j \neq i \\ \mathbf{S}_{ii} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, & \text{если } j = i. \end{array}\right.$ ▲

§11. Обратная матрица

Одна из аксиом числового поля требует наличия, для каждого ненулевого числа a, существования обратного ему числа a^{-1} такого, что $a \cdot a^{-1} = 1$. Аналогичное соотношение можно рассматривать и для *квадратных* матриц, учитывая, что роль единицы здесь играет единичная матрица.

Обычно определение обратной матрицы дается так:

$$\boxed{\left\langle \textit{матрица } \mathbf{A}^{-1} - \textit{обратная} \text{ по отношению к } \mathbf{A} \right\rangle \underset{def}{\Leftrightarrow} \left\langle \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} \right\rangle} \qquad (11.1)$$

Используя понятие перестановочных матриц, можно дать еще одно определение:

> *обратной* по отношению к **A** называют *перестановочную* с ней матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ = такую, что $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$.

Согласно определению (11.1), матрица **A** должна быть *квадратной*, а отыскание обратной (тоже квадратной) для нее матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ сводится к решению матричного уравнения **AX = E**. Очевидно также, что это уравнение будет определенным тогда и только тогда, когда ранг матрицы $r(\mathbf{A_n}) = n$.

Матрица $\mathbf{A_n}$ называется *невырожденной* при $r(\mathbf{A_n}) = n$, но *вырожденной* при $r(\mathbf{A_n}) < n$.

При $r(\mathbf{A}) < n$ (т.е. если матрица $\mathbf{A_n}$ вырождена) уравнение **AX = E** не имеет решений (матрица $\mathbf{A}^{-1}$ не существует), поскольку $r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}) = n \neq r(\mathbf{A})$.

В совокупности это позволяет сформулировать *НДУ существования обратной матрицы*:

матрица $\mathbf{A_n}$ имеет обратную тогда и только тогда, когда **A** – невырожденная ($r(\mathbf{A_n}) = n$).

Ниже, в §16, мы найдем явный вид обратной матрицы для невырожденной $\mathbf{A_n}$, используя понятие определителя.

Пример 11.1. Найдем матрицу, обратную матрице $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Используя р.м. и метод ГЖ, получаем:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j \ (j = 1, 2, 3) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x}_{1j} & \underline{x}_{2j} & \underline{x}_{3j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{array} \end{array} \overset{\boxed{\begin{array}{c} u_2 := u_2 - 2u_1 \\ u_3 := u_3 - 3u_1 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\boxed{\begin{array}{c} u_1 := u_1 + 2u_3 \\ u_2 := -u_2 \end{array}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & -11 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{c} u_1 := 5u_1 \\ u_3 := 5u_3 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{5} & 0 & -55 & -25 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & -35 & -15 & 0 & 5 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{c} u_1 := u_1 + 11u_2 \\ u_3 := u_3 + 7u_1 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{5} & 0 & 0 & -3 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 0 & -1 & -7 & 5 \end{array}\right).$$

В левой части р.м. получена, с точностью до перестановки строк, матрица 5**E**. Но $\mathbf{AX} = 5\,\mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \frac{1}{5}\mathbf{X} = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\mathbf{X}$, поэтому читая уравнения в порядке расположения строк единичной матрицы, получаем $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -11 & 10 \\ -1 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -11/5 & 2 \\ -1/5 & -7/5 & 1 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$.

Для проверки используем вторую часть определения (8.1) и матрицу X = $5\mathbf{A}^{-1}$:

$$5\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -11 & -7 & -1 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-22+30 & 6+44-50 & 6+44-50 \\ -1-14+15 & 2+28-25 & -3-7+10 \\ 2-2+0 & -4+4+0 & 6-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\mathbf{E}.$$

Результат свидетельствует о том, что обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ найдена верно. ►

▼**Замечание 11** (*матричный способ* решения матричных уравнений). Если **A** – невырожденная *квадратная* матрица, то уравнение **AX = B** можно решить матричным способом. В общем случае имеем:

$$\mathbf{A_n}\,\mathbf{X}_{n*p} = \mathbf{B}_{n*p} \Leftrightarrow (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\,\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{EX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \qquad (11.2)$$

Аналогично: $\mathbf{X}_{m*n}\,\mathbf{A_n} = \mathbf{B}_{m*n} \Leftrightarrow \mathbf{X}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{B}\,\mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}^{-1}$. (11.3)

В частности, для СЛУ с невырожденной квадратной матрицей:

$$\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}. \qquad (11.4)$$

Пример 11.2. Решим уравнение **AX = B**, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 42 & -4 & -15 \\ -14 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, рассмотренное в примере 10.1, матричным способом.

Находим матрицу $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -4 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & -1 & -5 \\ 8 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Используя (11.2), получаем:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} 42 & -4 & -15 \\ -14 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 28 & 4 & -20 \\ 0 & -8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

что совпадает с полученным в примере 10.1 ответом, причем прямое использование метода ГЖ со всей очевидностью является более эффективным.►

Прямое использование метода ГЖ (пример 10.1) требует меньшего объема вычислений. Однако в дальнейшем (см. §16) мы найдем быстрый алгоритм обращения матрицы *второго порядка*, что позволит сделать матричный способ решения данной задачи более эффективным.►

§12. Определитель (детерминант) порядка *n*

Рассмотрим определенную систему $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, т.е. имеющую $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ своим единственным решением. Найдем ее решение, используя метод ГЖ, но с приведением матрицы **A** не к диагональному, а к верхнему треугольному виду, для матрицы **A** порядка 4. Применим следующий алгоритм преобразования системы, допуская перестановки уравнений и неизвестных в ней с целью получения *ненулевых элементов на главной диагонали*:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \to \\ u_2 \to \\ u_3 \to \\ u_4 \to \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \end{array}\right).$$

$\boxed{u_i := a_{11}u_i - a_{i1}u_1 \ (i := 2, 3, 4)}$ $\boxed{u_3 := b_{22}u_3 - b_{32}u_2;\ u_4 := b_{22}u_4 - b_{42}u_2}$ $\boxed{u_4 := c_{33}u_4 - c_{43}u_3}$

Здесь элементы b_{ij} (i, j = 2, 3, 4), появившиеся на первом этапе преобразований, удобно записывать в виде конструкции, которая в дальнейшем будет называться *определителем* [*матрицы*] *второго порядка*:

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} \text{ (в частности, } b_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}).$$

Аналогично, для c_{ij} (i, j = 3, 4), и d_{44} получаем:

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{2j} \\ b_{i2} & b_{ij} \end{vmatrix} = b_{22}b_{ij} - b_{i2}b_{2j}, \quad d_{44} = \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = c_{33}c_{44} - c_{43}c_{34}.$$

Далее, c_{33} находится как

$$\begin{aligned} c_{33} = b_{22}b_{33} - b_{32}b_{23} &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\cdot(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})\cdot(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{11}a_{33} + \underline{a_{21}a_{12}a_{31}a_{13}} - \\ &\quad - a_{11}a_{32}a_{11}a_{23} + a_{11}a_{32}a_{21}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{11}a_{23} - \underline{a_{31}a_{12}a_{21}a_{13}} = \\ &= a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{32}a_{21}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) \end{aligned}$$

и содержит в себе (ненулевой!) множитель a_{11}. Этот же множитель будет присутствовать во всех получаемых c_{ij}, что позволяет провести деление на a_{11} всех уравнений, начиная с третьего, и полагать, после перегруппирования, что:

$$\begin{aligned} c_{33} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}), \\ c_{34} &= a_{11}(a_{22}a_{34} - a_{24}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{34} - a_{24}a_{31}) + a_{14}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}), \\ c_{43} &= a_{11}(a_{22}a_{43} - a_{23}a_{42}) - a_{12}(a_{21}a_{43} - a_{23}a_{41}) + a_{13}(a_{21}a_{42} - a_{22}a_{41}), \\ c_{44} &= a_{11}(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) - a_{12}(a_{21}a_{44} - a_{24}a_{41}) + a_{14}(a_{21}a_{42} - a_{22}a_{41}). \end{aligned}$$

Здесь, кстати, все c_{ij} можно получить из c_{33} простой заменой первого индекса 3 на i, а второго индекса 3 на j.

Наконец, четвертый диагональный элемент d_{44} будет содержать в себе 64 слагаемых, каждое из которых будет состоять из 6 сомножителей. После приведения подобных остается ровно 48 слагаемых, из которых 24 слагаемых содержат пары $a_{11}a_{22}$ и еще 24 – пары $a_{21}a_{21}$. Можно проверить, что это позволяет получить ровно 24 слагаемых с общим множителем $b_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21}$, на который можно разделить полученное четвертое уравнение. Результат этого деления приведет к окончательному виду для d_{44}, состоящему из 24 произведений по 4 сомножителя в каждом, из которых 12 – с дополнительным знаком «+», и 12 – с дополнительным знаком «–» (см. пример 9.2.1). Можно также заметить, что этот знак определяется общим количеством «*беспорядков*» в последовательности индексов столбцов соответствующего произведения, т.е. таких нарушений, когда больший индекс находится левее меньшего.

Очевидно, что возможность появления *единственного* нулевого решения системы $\mathbf{A_n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ определяется тем, равен или не равен нулю последний диагональный элемент получаемой в процессе указанных преобразований верхней треугольной матрицы. Можно также заметить, что в составляющие его произведения входят все элементы матрицы, причем в каждое произведение – ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы **A**. Этот (последний диагональный) элемент называется ***определителем***, или ***детерминантом*** исходной [числовой] квадратной матрицы и обозначается det$\mathbf{A_n}$ или, более кратко, как $|\mathbf{A_n}|$. От того, равен ли он нулю или является ненулевым, зависит, является ли определенной или неопределенной система $\mathbf{A_n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (а, следовательно, и система $\mathbf{A_n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$).

Обобщение полученных результатов позволяет говорить об определителе $|\mathbf{A_n}|$ матрицы $\mathbf{A_n}$, или ***детерминанте*** det$\mathbf{A_n}$, как о сумме *всех* различных произведений элементов матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A_n}$ таких, что в каждое из этих произведений входит ровно по одному элементу из *каждого* столбца и *каждой* строки матрицы, причем каждое произведение (как слагаемое) снабжается дополнительным знаком.

Для составления подобных сумм используют алгоритмы перебора номеров строк и номеров столбцов матрицы, заведомо исключающих возможность появления среди этих номеров, для строк и столбцов по-отдельности, хотя бы двух одинаковых. Для этой цели применяются так называемые ***перестановки***, а точнее – состоящие из двух перестановок ***подстановки***.

Перестановки и подстановки. Для нумерации строк (столбцов) квадратной матрица порядка n используется, как правило, множество N^n первых n натуральных чисел. ***Перестановкой порядка n*** называется любое взаимно однозначное отображение этого множества на себя, т.е. любое упорядоченное множество $(i_1,i_2,...,i_n) = (i_j)$, где $i_j \in N^n$, $i_j \neq i_k$ для всех $i \neq k$. Иначе говоря, произвольная перестановка образуется перемешиванием позиций в записи первых n чисел натурального ряда.

Всего можно составить ровно $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1 = \boldsymbol{n!}$ *различных* перестановок порядка n. Действительно, на первое место в перестановке порядка n можно поставить любое из n образующих ее чисел (*элементов*), на второе, для каждого фиксированного числа на первом месте, – любое из n – 1 оставшихся, на третье, для каждого фиксированного сочетания двух первых чисел, – любое из n – 2 оставшихся и т.д.

Перестановку (1, 2,..., n) называют *нормальной*, а (n, n–1,..., 2, 1) – *обратной*.

Порядок следования элементов в перестановке (i_j) определяет число s так называемых ***инверсий*** (или ***беспорядков***) в ней. Число i_j образует инверсию с числом i_{j+k} в перестановке вида $(\ldots i_j \ldots i_{j+k} \ldots)$, если $i_j > i_{j+k}$, т.е. если большее число расположено в перестановке левее меньшего. Так, в перестановке (2, 3, 1, 6, 4, 7, 5) инверсии образуются парами (2, 1), (3, 1), (6, 4), (6, 5) и (7, 5), т.е. здесь s = 4.

Чтобы найти число инверсий, достаточно последовательно просуммировать количество чисел, меньших тех, которые находятся правее первого, второго и т.д. элемента перестановки (у нас s = 1+1+0+2+0+1 = 5).

Среди всех перестановок порядка n наименьшее число инверсий ($s = 0$) имеет нормальная перестановка, а наибольшее – обратная, для которой $s = n(n-1)/2$. Перестановки с четным или нечетным числом инверсий называются соответственно *четными* и *нечетными*. Количественно четность перестановки (i_j) может быть определена числом $(-1)^s$, равным +1 для четных и –1 для нечетных перестановок.

Перемену местоположения двух элементов перестановки называют *транспозицией*. Если совершить транспозицию двух соседних элементов перестановки, то полученная перестановка либо приобретет, либо потеряет *ровно одну* инверсию, т.е. получит четность, противоположную исходной. Транспозицию же любых двух произвольных в перестановке (i_j), например i_k и i_{k+m},. можно произвести так: сначала переместить число i_{k+m} на позицию k, совершив при этом m транспозиций соседних символов, а затем – число i_k (теперь уже с позиции $k + 1$) на позицию $k + m$ за $m - 1$ аналогичных транспозиций. Таким образом, четность конечной перестановки меняется, по сравнению с исходной, $2m-1$ (нечетное число) раз, т.е. эта перестановка имеет четность, противоположную исходной. Итак,

транспозиция двух любых элементов перестановки дает перестановку другой четности.

Две записанные одна под другой перестановки $\begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix}$ порядка n образуют ***подстановку*** того же порядка. *Элементом подстановки* называется *пара* расположенных на одной и той же позиции чисел. Ясно, что число *различных* по своей записи подстановок порядка n составляет $(n!)^2$. Четность подстановки определяется суммарным числом $s_i + s_j$ инверсий соответственно в верхней и нижней перестановках. Транспозиция двух элементов подстановки одновременно меняет четности и верхней, и нижней перестановок, поэтому *транспозиция элементов подстановки не меняет ее четности.*

Детерминант порядка n матрицы $\mathbf{A_n}$**.** Составим все возможные произведения элементов матрицы $\mathbf{A_n} = (a_{ij})$ порядка n такие, чтобы в каждое из них входили ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Для этого воспользуемся подстановками $\begin{pmatrix} i \\ j_i \end{pmatrix}$ порядка n с *фиксированной* верхней перестановкой, которая называется *нормальной*. Элементы этой перестановки, слева направо, будут являться *номерами строк* соответствующих сомножителей a_{ij} в указанных произведениях. Тогда количество *различных* произведений будет определяться числом различных нижних перестановок, элементы которых будут *номерами j столбцов* чисел a_{ij}, составляющих указанные произведения.

Всего, следовательно, мы сможем составить $n!$ различных произведений вида $a_{1,j_{k1}} \cdot a_{2,j_{k2}} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_{kn}} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,j_{ki}}$, в которых индексы i (номера строк) для всех произведений определены верхней (фиксированной) перестановкой, а индексы j_{ki} меняются от подстановки к подстановке (за счет нижних перестановок). Приписывая к каждому k-произведению множитель $(-1)^{\tilde{s}_k}$, где $\tilde{s}_k$ – количество инверсий в нижней k-перестановке, и суммируя все полученные произведения, мы получим ***выражение*** (а для числовой матрицы – число), называемое *определителем (детерминантом) матрицы* $\mathbf{A}$ *порядка n* и обозначаемое det$\mathbf{A}$ (или det$\mathbf{A}_n$, или $|\mathbf{A}|$):

$$\boxed{\det \mathbf{A}_n = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{s_k} \prod_{i=1}^{n} a_{i,j_{ki}}}. \tag{12.1}$$

Переменная суммирования k в этой формуле означает порядковый номер подстановки, которая задает номера столбцов для элементов матрицы, включаемых в произведения.

Пример 12.1. Приведем таблицу для получения явной формулы детерминанта четвертого порядка на основании определения (12.1).

Здесь первые индексы всех сомножителей последовательно совпадают с элементами нормальной перестановки (1, 2, 3, 4) = (i), а вторые – представлены в столбцах j_i, причем их можно рассматривать как элементы матрицы $\mathbf{J_{n!*n}} = (j_{ki})$. Получаем таблицу, в которой $\tilde{s}_k$ – число инверсий в k-перестановке, отвечающей за номера строк:

i	**1**	**2**	**3**	**4**	$\tilde{s}_k$	$(-1)^{\tilde{s}_k}\prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,j_{ki}}$	i	**1**	**2**	**3**	**4**	$\tilde{s}_k$	$(-1)^{\tilde{s}_k}\prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,j_{ki}}$
j_i / k	j_1	j_2	j_3	j_4			j_i / k	j_1	j_2	j_3	j_4		
1	**1**	**2**	**3**	**4**	***0***	$+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$	13	**3**	**1**	**2**	**4**	2	$+a_{13}\,a_{21}\,\boldsymbol{a}_{\mathbf{32}}\,a_{44}$
2	**1**	**2**	**4**	**3**	*1*	$-a_{11}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{43}$	14	**3**	**1**	**4**	**2**	*3*	$-a_{13}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{42}$
3	**1**	**3**	**2**	**4**	*1*	$-a_{11}\,a_{23}\,\boldsymbol{a}_{\mathbf{32}}\,a_{44}$	15	**3**	**2**	**1**	**4**	*3*	$-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{44}$
4	**1**	**3**	**4**	**2**	*2*	$+a_{11}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{42}$	16	**3**	**2**	**4**	**1**	*4*	$+a_{13}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{41}$
5	**1**	**4**	**2**	**3**	*2*	$+a_{11}\,a_{24}\,\boldsymbol{a}_{\mathbf{32}}\,a_{43}$	17	**3**	**4**	**1**	**2**	*4*	$+a_{13}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{42}$
6	**1**	**4**	**3**	**2**	*3*	$-a_{11}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{42}$	18	**3**	**4**	**2**	**1**	*5*	$-a_{13}a_{24}\,\boldsymbol{a}_{\mathbf{32}}\,a_{41}$
7	**2**	**1**	**3**	**4**	***1***	$-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{44}$	19	**4**	**1**	**2**	**3**	***3***	$-a_{14}a_{21}\,\boldsymbol{a}_{\mathbf{32}}\,a_{43}$
8	**2**	**1**	**4**	**3**	*2*	$+a_{12}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{43}$	20	**4**	**1**	**3**	**2**	*4*	$+a_{14}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{42}$
9	**2**	**3**	**1**	**4**	*2*	$+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{44}$	21	**4**	**2**	**1**	**3**	*4*	$+a_{14}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{43}$
10	**2**	**3**	**4**	**1**	*3*	$-a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{41}$	22	**4**	**2**	**3**	**1**	*5*	$-a_{14}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{41}$
11	**2**	**4**	**1**	**3**	*3*	$-a_{12}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{43}$	23	**4**	**3**	**1**	**2**	*5*	$-a_{14}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{42}$
12	**2**	**4**	**3**	**1**	*4*	$+a_{12}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{41}$	24	**4**	**3**	**2**	**1**	*6*	$+a_{14}\,a_{23}\,\boldsymbol{a}_{\mathbf{32}}\,a_{41}$

Суммируя все приведенные в таблице 4! = 24 произведения, мы получаем det$\mathbf{A_4}$. ►

Аналогично, фиксируя нормальной перестановкой *номера столбцов* и формируя n! различных перестановок для номеров строк с помощью матрицы $\mathbf{I_{n!*n}} = (i_{kj})$, получаем определение, эквивалентное определению (12.1):

$$\boxed{\det \mathbf{A}_n = \sum_{k=1}^{n!}(-1)^{s_k}\prod_{j=1}^{n} a_{i_{kj},j}}. \qquad (12.2)$$

◄***Пример 12.2.*** Приведем таблицу для получения явной формулы детерминантов третьего и второго порядков на основании определения (12.2). В первом случае вторые индексы всех сомножителей последовательно совпадают с элементами нормальной перестановки (1, 2, 3) = (j), а первые – представлены в столбцах i_j, причем их можно рассматривать как элементы матрицы $\mathbf{I_{n!*n}} = (i_{kj})$. В случае детерминанта второго порядка используется нормальная перестановка (1, 2). Таблица для составления явной формы det$\mathbf{A_3}$ показана слева, а для det$\mathbf{A_2}$ – справа:

j	**1**	**2**	**3**	s_k	$(-1)^{s_k}\prod\limits_{j=1}^{n} a_{i_{kj},j}$
i_j / k	i_1	i_2	i_3		
1	**1**	**2**	**3**	*0*	$+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$
2	**1**	**3**	**2**	*1*	$-a_{11}\,a_{32}\,a_{23}$
3	**2**	**1**	**3**	*1*	$-a_{21}\,a_{12}\,a_{33}$
4	**2**	**3**	**1**	*2*	$+a_{21}\,a_{32}\,a_{13}$
5	**3**	**1**	**2**	*2*	$+a_{31}\,a_{12}\,a_{23}$
6	**3**	**2**	**1**	*3*	$-a_{31}a_{22}\,a_{13}$

j	**1**	**2**	s_k	$(-1)^{s_k} a_{i_1,1}a_{i_2,2}$
i_j / k	i_1	i_2		
1	**1**	**2**	*0*	$+a_{11}\,a_{22}$
2	**2**	**1**	*1*	$-a_{21}\,a_{12}$
det$\mathbf{A_2}$ = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$				

Суммируя все приведенные в левой таблице 3! = 6 произведений, получаем det$\mathbf{A_3}$. Явное выражение для det$\mathbf{A_2}$ следует запомнить. ►

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно провести и относительно *произвольной*, но *фиксированной*, нижней (для номеров строк) или верхней (для номеров столбцов) перестановки в подстановках вида $\begin{pmatrix} i_p \\ j_p \end{pmatrix}$. Это дает возможность записать более общие, но опять же эквивалентные двум предыдущим, определения:

$$\boxed{\det \mathbf{A}_n = \sum_{k=1}^{n!}(-1)^{s_0+\tilde{s}_k}\prod_{p=1}^{n} a_{i_p,j_{kp}}}, \qquad (12.3)$$

$$\boxed{\det \mathbf{A}_n = \sum_{k=1}^{n!}(-1)^{\tilde{s}_0+s_k}\prod_{p=1}^{n} a_{i_{kp},j_p}}. \qquad (12.4)$$

Здесь s_0 и $\tilde{s}_0$ – число инверсий в фиксированных, соответственно в верхней и нижней, перестановках (в двух первых определениях $s_0 = \tilde{s}_0 = 0$). Связывая определение детерминанта с определенного вида подстановками, можно получить $n!$ определений вида (12.3) с фиксированной верхней и столько же определений вида (12.4) с фиксированной нижней перестановками.

В дальнейшем мы будем использовать только взаимно эквивалентные определения (12.1) и (12.2) как частные случаи тоже взаимно эквивалентных определений (12.3) и (12.4).

§13. Алгебраические дополнения, теорема о разложении и дополнительные миноры

Зафиксируем i-строку матрицы **A**. Это означает, что во всех подстановках, участвующих в определении (12.1), мы зафиксировали i-элемент верхней перестановки, т.е. число i. На месте элемента j_{ki} в нижней k-перестановке может оказаться любое число $p \in N^n$, причем во всех $n!$ подстановках *каждое* из чисел p встретится ровно $(n - 1)!$ раз. Следовательно, для каждого $p \in N^n$ из всех $n!$ произведений, входящих в det**A,** множитель a_{ip} содержат ровно $(n - 1)!$ произведений (это легко проследить, в частном случае, по таблице из примера 12.1, в которой выделен элемент $a_{ip} = \boldsymbol{a}_{32}$). Группируя слагаемые с a_{ip} и вынося a_{ip} в каждой из n полученных групп за скобки, для любого фиксированного i немедленно получаем:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\mathcal{A}_{ip} \ , \tag{13.1}$$

где выражения $\mathcal{A}_{ip}$ представляют собой так называемые ***алгебраические дополнения*** элементов a_{ip} (в данном случае –элементов i-строки матрицы $\mathbf{A_n}$). Формула (13.1) есть *формула разложения определителя по элементам i-строки*, или просто по *i-строке*.

Аналогично можно получить и формулу разложения определителя по j-столбцу:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj}\mathcal{A}_{pj} \ . \tag{13.2}$$

В силу тождественности преобразований, выполненных выше, формулы (13.1) и (13.2) являются *эквивалентными определениями* det**A**, представляя собой ***теорему о разложении определителя*** по элементам произвольной строки или произвольного столбца.

Дополнительный минор и его связь с алгебраическим дополнением. Каждое из произведений, составляющих алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_{ij}$ элемента a_{ij}, не содержит самого этого элемента. Это означает, что при формировании $\mathcal{A}_{ij}$ из рассмотрения исключены i-строка и j-столбец матрицы **A**, т.е. алгебраическое дополнение элемента a_{ij} можно связать с определителем, полученным из det**A** вычеркиванием i-строки и j-столбца. Такой *определитель* (имеющий порядок n –1) называют ***дополнительным минором*** элемента a_{ij} и обозначают $\mathcal{M}_{ij}$.

Очевидно, что, для получения $\mathcal{M}_{ij}$ через алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_{ij}$, следует исключить элемент $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ из всех перестановок, участвующих в формировании $\mathcal{A}_{ij}$. Для этого проведем в каждой *подстановке* транспозицию этого элемента с первым, что не изменяет четности подстановок. Далее удалим числа i и j из полученных подстановок, что уменьшит число инверсий в каждой из них на $(i - 1) + (j - 1) = i + j - 2$. Для полного согласования минора $\mathcal{M}_{ij}$ (порядка n –1) с определением (13.1) остается уменьшить на единицу все числа, которые больше i в верхних и больше j в нижних перестановках, составляющих полученные подстановки. Таким образом, получена связь между алгебраическим дополнением $\mathcal{A}_{ij}$ элемента a_{ij} и дополнительным минором $\mathcal{M}_{ij}$ того же элемента:

$$\boxed{\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j-2}\ \mathcal{M}_{ij} = (-1)^{i+j}\ \mathcal{M}_{ij}.} \tag{13.3}$$

Теперь формулы разложения определителя по столбцу или строке (эквивалентные определения det**A**) принимают окончательный вид:

$$\boxed{\det\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathcal{A}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}\,\mathcal{M}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathcal{A}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\,\mathcal{M}_{ik}\,.} \qquad (13.4)$$

Суммирование здесь проводится по индексу k, что делает необходимым замену индекса i из (13.3) и индекса p в формулах (13.1) и (13.2) на индекс k.

▼Замечания

13.1. Среди всех миноров порядка k, входящих в состав определителя порядка n, выделяют *главные* миноры, составленные из элементов матрицы с совпадающими номерами строк и столбцов. Среди всех главных миноров фиксированного порядка k есть один *угловой*, расположенный в первых k строках и k столбцах матрицы, минор.

13.2. Понятие минора позволяет определить *ранг* $r(\mathbf{A})$ матрицы $\mathbf{A_{m*n}}$ (не обязательно квадратной) как *наивысший* порядок отличного от нуля минора среди всех возможных, в смысле их построения, миноров $\mathcal{M}^k$ порядков k от 1 до $\min\{m,n\}$. С другой стороны, ранг r есть *наименьшее* число k (порядок минора) такое, что все миноры более высокого порядка, чем r, равны нулю, т.е.

$$\boxed{r = r(\mathbf{A_{m*n}}) = k \text{ такому, что } \mathcal{M}^{k+p} = 0 \text{ для всех } p = 1, 2,\dots, \min\{m,n\} - k.} \ ▲$$

§14. Свойства определителей и теорема Лапласа

Важно понимать, что каждому слагаемому из определения (12.1) соответствует, с точностью до расположения сомножителей, *ровно одно* такое же слагаемое, хотя и с другим порядковым номером k, из определения (12.2). Отсюда следует первое из свойств определителя:

1°. ***Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы***:

$$\boxed{\det\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det\mathbf{A}.}$$

На основании этого ***все свойства определителя, относящиеся к его строкам, справедливы и по отношению к его столбцам.*** Далее мы будем формулировать все свойства определителя только по отношению к столбцам (поскольку мы определили вектор как вектор-столбец). Как следствие свойства и с учетом замечания 13.2, ранги исходной и транспонированной матриц совпадают, т.е. $\boxed{r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}).}$

2°. ***При взаимной транспозиции (перестановке) двух столбцов матрицы определитель меняет знак на противоположный***. Доказательство этого свойства удобно провести на основании определения (12.2), построенного на подстановках вида $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \dots i_m \dots i_n \\ 1 \dots k \dots m \dots n \end{pmatrix}$ с фиксированной нижней перестановкой, отвечающей за номера столбцов. Транспозиция столбцов с номерами k и m эквивалентна транспозиции соответствующих чисел только в нижних перестановках, и теперь определитель будет строиться на подстановках вида $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \dots i_m \dots i_n \\ 1 \dots m \dots k \dots n \end{pmatrix}$. Это означает, что *каждое* слагаемое, входящее в определитель, принимает противоположное значение за счет изменения четности нижней перестановки и, следовательно, сам определитель изменит свой знак на противоположный.

2.1°. ***Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю***. Действительно, транспозиция двух одинаковых столбцов матрицы не изменит саму матрицу, но приведет к изменению знака ее определителя. Тогда $\det\mathbf{A} = -\det\mathbf{A}$, что возможно только при $\det\mathbf{A} = 0$.

Это и все последующие свойства определителей можно формализовать, если матрицу, на месте k-столбца которой находится вектор $\boldsymbol{b}$, обозначать через $\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b})$:

$$\boxed{\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{a}_m) = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ если } m \neq k \\ \det\mathbf{A}, \text{ если } m = k. \end{array}\right.} \qquad (14.1)$$

2.2°. $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathcal{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \det \mathbf{A}, k = j \\ 0, k \neq j \end{bmatrix}}$. Первая часть этой формулы вытекает из формулы (14.1), а вторая утверждает, *что* ***сумма произведений элементов столбца на алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю***. Действительно, $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathcal{A}_{ij}$ есть определитель матрицы, на месте *j*-столбца которой расположен столбец с номером *k*, причем сам *j*-столбец остается на своем месте. Таким образом, следствие 2.2° целиком повторяет формулу (14.1), что позволяет объединить его со следствием 2.1°:

$$\boxed{\det \mathbf{A}_k(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathcal{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \det \mathbf{A},\ j = k \\ 0,\ j \neq k. \end{bmatrix}} \tag{14.2}$$

3°. $\boxed{\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{0}) = 0}$, т.е. ***определитель матрицы с нулевым столбцом равен нулю,*** – это немедленно вытекает, например, из формулы (13.4), рассмотренной относительно *k*-столбца матрицы: $\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{0}) = \sum_{p=1}^{n} a_{pk}\mathcal{A}_{pk} = \sum_{p=1}^{n} 0 \cdot \mathcal{A}_{pk} = 0$.

4°. $\boxed{\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}) + \det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{c})}$, т.е**.** ***если k-столбец матрицы представить в виде суммы двух векторов, то ее определитель равен сумме определителей***, на месте *k*-столбца в которых записаны векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Свойство легко доказывается также с использованием формулы (13.4):

$$\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathcal{A}_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (b_{ik} + c_{ik})\mathcal{A}_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\mathcal{A}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\mathcal{A}_{ik} = \det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}) + \det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{c}).$$

5°. $\boxed{\det\mathbf{A}_k(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda\cdot \det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}),}$ т.е. ***общий для столбца множитель можно выносить за символ определителя***. Доказательство этого утверждения проводится аналогично предыдущему.

5.1°. $\boxed{\det(\lambda\cdot\mathbf{A_n}) = \lambda^n\cdot \det\mathbf{A}}$ (поскольку множитель λ выносится из каждого столбца).

Свойства 4° и 5° могут быть объединены в общее ***свойство линейности*** определителя:

5.2°. $\boxed{\det\mathbf{A}_k\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \det \mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}_i)}$.

6°. $\boxed{\det \mathbf{A}_k\left(\sum_{i=1 (i\neq k)}^{n} \lambda_i\boldsymbol{a}_i\right) = 0}$, т.е. ***определитель, один из столбцов которого является линейной комбинацией других его столбцов, равен нулю***. Для доказательства достаточно привлечь свойства 4°, 5° и формулу (14.2).

7°. $\boxed{\det \mathbf{A}_k\left(\boldsymbol{a}_k + \sum_{i=1 (i\neq k)}^{n} \lambda_i\boldsymbol{a}_i\right) = \det \mathbf{A}}$, т.е. ***определитель не изменится, если к некоторому его столбцу прибавить произвольную линейную комбинацию других столбцов*** (это следует из свойств 4° и 6°).

8°. ***Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали***. Для *верхней* треугольной матрицы $\mathbf{T_n} = (t_{ij})$, где $t_{ij} = 0$ для всех $i > j$ ($i, j \in N^n$), легко получить, проводя последовательные разложения определителей по последней строке: $\det \mathbf{T_n} = t_{nn} \det\mathbf{T_{n-1}} = t_{nn}\cdot t_{n-1,n-1} \det\mathbf{T_{n-2}} = \ldots = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$.

То же самое справедливо и для *нижней* треугольной матрицы как транспонированной верхней (свойство 1°), а также к их частному случаю – диагональной матрице.

Теорема Лапласа. Она является обобщением теоремы о разложении определителя (формула 13.4). Формулировка теоремы Лапласа, приводимая ниже, есть результат рассуждений, основанных на использовании дополнительной леммы.

▼***Лемма об угловом миноре***. *Все произведения всех слагаемых, входящих в угловой минор* $\mathcal{M}^p$ *определителя* det$\mathbf{A}_n$, *на слагаемые дополнительного к* $\mathcal{M}^p$ *минора* $\tilde{\mathcal{M}}^{n-p}$, *являются слагаемыми, входящими в определитель* det$\mathbf{A}_n$.

Привлечем к дальнейшим рассуждениям определение (12.1). Рассмотрим входящие в det$\mathbf{A}_n$ определитель порядка p, находящийся в его первых p столбцах и p строках (*угловой* минор $\mathcal{M}^p$), и определитель, полученный вычеркиванием этих столбцов и строк (дополнительный к $\mathcal{M}^p$ минор $\tilde{\mathcal{M}}^{n-p}$). Их произведение дает $p!(n–p)!$ слагаемых, каждое из которых, в свою очередь, входит в det$\mathbf{A}_n$. Номера столбцов (как и строк) миноров $\mathcal{M}^p$ и $\tilde{\mathcal{M}}^{n-p}$ представляют собой непересекающиеся множества. В силу этого число инверсий в каждой подстановке, определяющей согласно (12.1) номера столбцов для сомножителей, есть сумма инверсий в подстановках, относящихся к $\mathcal{M}^p$ и $\tilde{\mathcal{M}}^{n-p}$ соответственно. Следовательно, перемножая (с учетом дополнительных множителей вида $(-1)^{\tilde{s}_k}$) каждое произведение из $\mathcal{M}^p$ с каждым из $\tilde{\mathcal{M}}^{n-p}$, мы получаем соответствующие слагаемые из указанного det$\mathbf{A}_n$ с нужными дополнительными знаками. Это полностью доказывает лемму. ▲

Выберем в определителе det$\mathbf{A}_n$ порядка n, независимо друг от друга, p строк с номерами $i_1 < i_2 <\ldots< i_p$ и p столбцов с номерами $j_1 < j_2 <\ldots< j_p$ ($1 < p < n$). На их пересечении находится минор $\mathcal{M}^p$, которому соответствует дополнительный ему минор $\tilde{\mathcal{M}}^{n-p}$.

Переместим строки и столбцы, в которых находится минор $\mathcal{M}^p$, на позиции 1, 2,…, p за счет последовательных транспозиций *соседних* строк и столбцов. Всего будет совершено транспозиций: $(i_1-1) + (i_2-2) + \ldots + (i_p-p) = \sum\limits_{k=1}^{p}(i_k - k)$ для строк и $\sum\limits_{k=1}^{p}(j_k - k)$ для столбцов.

Каждая транспозиция сопровождается изменением знака определителя на противоположный (свойство 2°), что приводит к необходимости приписать к полученному произведению $\mathcal{M}^p\tilde{\mathcal{M}}^{n-p}$ множитель $(-1)^{\tilde{s}} = (-1)^s$, где $s = \sum\limits_{k=1}^{p}(i_k + j_k)$, $\tilde{s} = s - 2\sum\limits_{k=1}^{p}k$. Это означает, на основании леммы об угловом миноре, что в исходном определителе (с неперемещенными строками и столбцами) произведение $(-1)^s\mathcal{M}^p\tilde{\mathcal{M}}^{n-p}$ порождает $p!(n–p)!$ слагаемых из det$\mathbf{A}_n$ с требуемыми определением (10.1) дополнительными знаками. Сумма всех C_n^p различных произведений такого вида дает все $C_n^p \cdot p!\,(n-p)! = n!$ произведений, входящих в det$\mathbf{A}_n$, причем миноры $\mathcal{M}^p$ можно выбирать как из *произвольных* строк, так и (независимо от первого!) из *произвольных* столбцов.

Приведенные выкладки позволяют сформулировать *теорему Лапласа*.

> Определитель det$\mathbf{A}_n$ равен сумме произведений всех различных миноров $\mathcal{M}_m^p$ порядка p, расположенных в произвольно выбранных (но в порядке возрастания номеров) p строках или столбцах матрицы $\mathbf{A}$, на их дополнительные миноры, причем каждое произведение берется с дополнительным множителем $(-1)^{s_m}$, где $s_m = \sum\limits_{k=1}^{p}(i_k + j_k)_m$ – сумма номеров строк и столбцов, в которых расположен минор $\mathcal{M}_m^p$ с номером m:
>
> $$\det\mathbf{A}_n = \sum_{m=1}^{C_n^p}(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}(i_k+j_k)_m}\mathcal{M}_m^p\tilde{\mathcal{M}}_m^{n-p}. \tag{14.3}$$

Очевидно, что теорема Лапласа является обобщением теоремы о разложении определителя по элементам строки (столбца), представленной формулой (13.4). Удобнее всего пользоваться этой теоремой в случае, когда в используемых строках (столбцах) находится или остается (благодаря использованию свойств 7° и 5° определителя) только один ненулевой минор (см. пример 15.1).

Определитель произведения матриц. Рассмотрим определитель блочной матрицы $\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbf{A_n} & \mathbf{\Theta_n} \\ \hdashline -\mathbf{E} & \mathbf{B_n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \hdashline -\boldsymbol{e}_1 & \cdots & -\boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{array}\right)$ с *квадратными* блоками порядка n.

По теореме Лапласа имеем: $\det\mathbf{C} = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$.

Обнулим теперь блок **B** определителя $|\mathbf{C}|$. Для этого достаточно прибавить к каждому j-столбцу матрицы **C**, связанному с блоком **B** (вектором $\boldsymbol{b}_j$), линейную комбинацию $\sum\limits_{k=1}^{n} b_{kj}\cdot\boldsymbol{c}_k$ всех n первых столбцов матрицы **C**, взятых с числовыми коэффициентами, являющимися координатами вектора $\boldsymbol{b}_j$. Так как первые n координат векторов $\boldsymbol{c}_k$ суть a_{ik}, то на месте чисел 0_{ij} $(i, j = 1, 2,\dots, n)$ в нулевом блоке окажутся числа $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = d_{ij}$, т.е. элементы произведения **AB**. Проведенные операции не изменили $|\mathbf{C}|$, т.е.

$$|\mathbf{C}| = \left|\begin{array}{c:c} \mathbf{A} & \mathbf{AB} \\ \hdashline -\mathbf{E} & \mathbf{\Theta} \end{array}\right| = (-1)^n \left|\begin{array}{c:c} \mathbf{AB} & \mathbf{A} \\ \hdashline \mathbf{\Theta} & -\mathbf{E} \end{array}\right| = (-1)^n \det(\mathbf{AB})\cdot(-1)^n = \det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{C} = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}.$$

Итак, *определитель произведения <u>квадратных</u> матриц равен произведению определителей*:

$$\boxed{\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}.} \qquad (14.4)$$

Полученный вывод можно рассматривать как <u>свойство 9°</u> определителя.

§15. Методы вычисления определителей.

Наиболее распространенными при практической работе с числовыми определителями являются метод понижения порядка и метод приведения определителя к треугольному виду. Другие методы вычисления определителей порядка n подробно описаны, например, в [6 (отдел I, §5)].

Метод понижения порядка. Он основан на теореме о разложении определителя по элементам фиксированного столбца или фиксированной строки (п. 10.3, формула 10.8). При этом предварительно, если это необходимо, используют свойства 7° и 5° с единственной целью – оставить в выбранном столбце (или выбранной строке) только один ненулевой элемент.

Заметим, что свойство 7° определителей фактически использовалось нами при решении СЛУ методом Гаусса – Жордана, но только по отношению к строкам (расширенной матрицы). Для пояснения проводимых при вычислении определителей действий удобно обозначать строки определителя как g_i (а столбцы как v_i) и использовать для пояснений символ := (оператор присвоения) по тем же правилам, что и в методе Гаусса – Жордана.

Понижение обычно проводят вплоть до получения определителя второго порядка.

Пример 15.1. Вычислим определитель матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 & 4 & -6 \\ -7 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ -6 & -3 & 4 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -4 & -2 & -10 \\ -13 & -7 & 3 & -11 & 2 \end{pmatrix}$.

Проводя операции, указанные в рамочках под или над символом равенства, имеем:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & -3 \\ 7 & 4 & -6 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 5 & -3 \\ 1 & -8 & -16 & -5 & 11 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\begin{matrix} v_3 := v_3 + 5v_5 \\ v_2 := v_2 + v_5 \\ v_1 := v_1 - 2v_5 \end{matrix}}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 9 & 3 & -11 & 7 & -3 \\ 7 & 4 & -6 & 9 & 0 \\ 7 & 4 & -7 & 5 & -3 \\ -21 & 3 & 39 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 9 & 3 & -11 & 7 \\ 7 & 4 & -6 & 9 \\ 7 & 4 & -7 & 5 \\ -21 & 3 & 39 & -5 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\begin{matrix} g_1 := g_1 - g_3 \\ g_2 := g_2 - g_3 \\ g_4 := g_4 + 3g_3 \end{matrix}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & -7 & 5 \\ 0 & 15 & 18 & 10 \end{vmatrix} \underset{\boxed{v_4 := v_4 - 4v_3}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 18 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 7 & 4 & -7 & 33 \\ 0 & 15 & 18 & -62 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 18 \\ 7 & 4 & 33 \\ 0 & 15 & -62 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\begin{matrix} v_3 := v_3 - 9v_1 \\ v_1 := v_1 + 2v_2 \end{matrix}}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{1} & 0 \\ 15 & 4 & -30 \\ 30 & 15 & -62 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+2}\cdot 15 \begin{vmatrix} 1 & -30 \\ 2 & -62 \end{vmatrix} = 15\,(62 - 60) = 15\cdot 2 = \underline{30.}$$

Вычислим этот же определитель, используя другой, более короткий, алгоритм:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & -3 \\ 7 & 4 & -6 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 5 & -3 \\ 1 & -8 & -16 & -5 & 11 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\substack{g_5:=g_5+g_4 \\ g_3:=g_3-3g_1 \\ g_2:=g_2-g_1}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 9 & 7 & -4 \\ 1 & 7 & 9 & 9 & -3 \\ 1 & 7 & 8 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & -8 & 0 & 8 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\substack{g_5:=g_5-g_1 \\ g_3:=g_3-g_4 \\ g_2:=g_2-g_4 \\ g_1:=g_1-2g_4}}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{15} & -21 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & 7 & 8 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\substack{g_1:=g_1-g_3 \\ g_2:=g_2-g_3 \\ g_4:=g_4+3g_3}}}{=}$$

$$= 1\cdot(-1)^{4+1}\cdot(-15)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \underset{\boxed{g_1:=g_1-g_2}}{=} 15\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 15\cdot2\cdot\ (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 30\cdot(7-6) = \underline{30.}$$

Заметим, что после второго этапа наших преобразований мы могли бы воспользоваться и теоремой Лапласа, поскольку в первых двух столбцах имеется единственный ненулевой минор. Имели бы, согласно (10.11):

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -15 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \ldots = \underline{30.}\ \blacktriangleright$$

Метод приведения к треугольному виду. Те же свойства 7° и 5°, в совокупности со свойством 2°, позволяют привести определитель к нижнему или верхнему треугольному виду, а затем применить свойство 8°.

Пример 15.2. Вычислить определитель матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>*Решение*</u>. Обозначая строки определителя как g_i (а столбцы как v_i) и используя для пояснений символ := (оператор присвоения), получаем с помощью указанных в рамочках операций, выполняемых последовательно сверху вниз:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\boxed{v_4:=v_4+2v_3}}{=} \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\substack{g_2:=g_2+g_1 \\ g_3:=g_3+g_4}}}{=} \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\boxed{g_2 \leftrightarrow g_3}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\boxed{g_1:=g_1+2g_3}}{=} \begin{vmatrix} -11 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\boxed{v_2:=v_2+v_1}}{=} \begin{vmatrix} -11 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-11\ 6\ (-1)\cdot3) = \underline{-198}.$$

Заметим, что после первого шага преобразований можно было вынести за символ определителя множитель 3 из четвертого столбца, а после четвертого – множитель 11 из первой строки.

Предложенный алгоритм не является единственным. Можно, например, свести определитель к верхнему (а не к нижнему, как это сделано выше) треугольному виду:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\boxed{v_1 \leftrightarrow v_2}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\substack{g_2:=g_2-4g_1 \\ g_3:=g_3-2g_1 \\ g_4:=g_4-3g_1}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 22 & -11 & 22 \\ 0 & 7 & -3 & 3 \\ 0 & 19 & -7 & 17 \end{vmatrix} \underset{\boxed{v_2 \leftrightarrow v_3}}{=}$$

$$= -11\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & -7 & 19 & 17 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\substack{g_3:=g_3+3g_2 \\ g_4:=g_4+7g_2}}}{=} -11\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \underset{\boxed{g_4:=g_4-5g_3}}{=} -11\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -11\ 1\ 1\cdot1\cdot18 = \underline{-198}.$$

Более того, вычисление определителя можно в нашем случае существенно ускорить, используя метод понижения порядка и начиная преобразования с третьего столбца:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{g_1:=g_1-2g_3 \\ g_2:=g_2+3g_3 \\ g_4:=g_4+g_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 6 \\ -7 & 10 & 0 & -9 \\ -3 & 2 & \mathbf{1} & -5 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -7 & 10 & -9 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \underset{v_2:=v_2-5v_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -8 & 6 \\ -7 & 45 & -9 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9\,2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 18\cdot(-11) = \underline{-198}. \blacktriangleright$$

§16. Правило Крамера и явный вид обратной матрицы

Правило Крамера. Рассмотрим систему $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_j \in \mathbf{R^n}$ (см. §5). Попытаемся найти решение этой системы, т.е. вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R^n}$, используя определитель $\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b})$. Подставляя вместо вектора $\boldsymbol{b}$ л.к. векторов-столбцов матрицы $\mathbf{A}$, для любого $k \in \mathbf{N^n}$ по свойству 5.2° определителя имеем:

$$\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}) = \det\mathbf{A}_k\Big(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_j x_j\Big) = \det\mathbf{A}_k\Big(x_k\boldsymbol{a}_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\boldsymbol{a}_j x_j\Big) = x_k\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{a}_k) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} x_j\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{a}_j),$$

откуда с учетом (14.2), получаем:

$$\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}) = x_k\cdot\det\mathbf{A}. \qquad (16.1)$$

Соотношение (16.1) показывает, что при $\det\mathbf{A} = 0$ система $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является несовместной, если *хотя бы один* из $\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b})$ <u>*не*</u> равен нулю, но будет неопределенной, если *все* $\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}) = 0$. В случае $\det\mathbf{A} \neq 0$ система оказывается определенной, и из (16.1) вытекает

<u>*правило Крамера*</u> для отыскания координат x_k решения $\boldsymbol{x}$ *определенной* системы $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$x_k = \frac{\det\mathbf{A}_k(\mathbf{b})}{\det\mathbf{A}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (16.2)$$

Соотношения (16.1) и (16.2) позволяют сформулировать *НДУ определенности СЛУ с квадратной матрицей*:

Система $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ определенна тогда и только тогда, когда $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Для определенных систем $\mathbf{A_n}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ранг матрицы $\mathbf{A_n}$ равен ее порядку n, а матрицы с рангом $r(\mathbf{A_n}) = n$ рассматривались в §11 как невырожденные. Это позволяет сформулировать *НДУ существования обратной матрицы* в следующем виде:

матрица $\mathbf{A_n}$ имеет обратную тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ – невырожденная ($r(\mathbf{A_n}) = n$).

Явный вид обратной матрицы. Операция, состоящая в отыскании матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, обратной *квадратной* матрице $\mathbf{A}$, называется ***обращением матрицы*** $\mathbf{A}$.

Обратим матрицу $\mathbf{A} = \mathbf{A_n} = (a_{ij})$, т.е. найдем обратную ей матрицу $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = (x_{ij})$. Для этого воспользуемся содержащимся в определении (11.1) матричным соотношением $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$, которое в нашем случае эквивалентно матричному уравнению $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ или, что то же самое, n системам из n уравнений с одной и той же матрицей $\mathbf{A} = \mathbf{A_n}$: $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_j$ для всех $j \in \mathbf{N^n}$. Здесь индекс j указывает на j-столбцы искомой $\mathbf{X}$ и единичной $\mathbf{E}$ матриц. Тогда для i-координаты вектора $\boldsymbol{x}_j$ соотношение (16.1) запишется, с учетом разложения определителя по j-столбцу, как:

$$x_{ij}\cdot\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}_i(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^{n}\delta_{kj}\mathcal{A}_{ki} = \delta_{jj}\mathcal{A}_{ji} = \mathcal{A}_{ji}.$$

Таким образом, <u>*если матрица* $\mathbf{A}$ *– невырожденая*</u>, то

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = (x_{ij}) = \left(\frac{\mathcal{A}_{ji}}{\det\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\quad(\mathcal{A}_{ji}). \qquad (16.3)$$

Найденная матрица, очевидно, единственна. Она удовлетворяет и соотношению $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ определения (11.1). Действительно, для элементов e_{ij} произведения $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ имеем:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathcal{A}_{ki}}{\det \mathbf{A}} a_{kj} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathcal{A}_{ki} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{0}{\det \mathbf{A}} = 0,\ i \neq j; \\ \dfrac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = 1,\ i = j, \end{array} \right.$$

т.е. $e_{ij} = \delta_{ij}$ являются элементами единичной матрицы (см. замечание 4.3).

Матрица $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}$ с элементами $\mathcal{A}_{ji}$ из (16.3) обозначается как $\mathbf{A}^{+}$ и называется *присоединенной* к $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Очевидно, что $\mathbf{A}^{+} = (\mathcal{A}_{ij})^{\mathrm{T}}$, т.е. является транспонированной матрицей алгебраических дополнений к элементам a_{ij}.

Используя понятие присоединенной матрицы, получаем при $\det\mathbf{A} \neq 0$:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} \iff \frac{\mathbf{AA}^{+}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = \mathbf{E} \iff \boxed{\mathbf{AA}^{+} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{E}\cdot\det\mathbf{A}}. \qquad (16.4)$$

Теперь покажем, что если матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную $\mathbf{A}^{-1}$, то определители обеих этих матриц заведомо не равны нулю. Для этого используем полученное выше соотношение (14.4), которое в данном случае можно применить к определению (11.1). Имеем:

$$\det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det\mathbf{E} \iff (\det \mathbf{A})\cdot(\det \mathbf{A}^{-1}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \det \mathbf{A} \neq 0 \\ \det \mathbf{A}^{-1} \neq 0, \end{cases}$$

что и требовалось показать.

На основании полученного и формулы (16.3) можно следующим образом переформулировать полученное в §11 *НДУ существования обратной матрицы*:

> матрица $\mathbf{A_n}$ имеет обратную тогда и только тогда, когда $\det\mathbf{A} \neq 0$.

▼Замечания

16.1. Применение формулы (16.3) для вычислений эффективно только для матриц порядков 2 и 3. Это связано с тем, что явное отыскание обратной матрицы требует нахождения одного определителя порядка n и n^2 определителей порядка $n - 1$. При $n = 3$ объем вычислений еще сравним с таковым при использовании метода ГЖ, но уже при $n = 4$ нам придется вычислить определитель порядка 4 и 16 определителей порядка 3. Это гораздо менее эффективно, нежели прямое использование метода ГЖ, тем более что последний косвенно дает ответ и на вопрос существования обратной матрицы.

Используем (16.3) для отыскания матрицы, обратной *невырожденной* матрице $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *второго порядка*. Здесь $\det\mathbf{A} = ad - bc \neq 0$, поэтому согласно (16.3) получаем:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{21} \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \ \blacktriangleright \qquad (16.5)$$

Эту формулу полезно запомнить и применять во всех подходящих случаях.

16.2. Для двух невырожденных квадратных матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ имеет место соотношение:

$$(\mathbf{BC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}. \qquad (16.6)$$

В самом деле, $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \dfrac{\mathbf{C}^{+}}{|\mathbf{C}|} \cdot \dfrac{\mathbf{B}^{+}}{|\mathbf{B}|} = \dfrac{(\mathbf{BC})^{+}}{|\mathbf{BC}|} = (\mathbf{BC})^{-1}$. Здесь использован тот факт, что $(\mathbf{BC})^{+}$ есть *транспонированная* матрица алгебраических дополнений к $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}$, и поэтому на основании (8.2.1) имеем $(\mathbf{BC})^{+} = \mathbf{C}^{+}\mathbf{B}^{+}$. ▲

Пример 16.1. Решим, с использованием обратной матрицы, уравнение: $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 42 & -4 & -15 \\ -14 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{A}$ – невырожденная матрица, так как $|\mathbf{A}| = -6 + 10 = 4 \neq 0$, что позволяет найти матрицу $\mathbf{X}$ как $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Имеем, согласно (13.3): $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\mathbf{X} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}^{\text{т}}\cdot\begin{pmatrix}42 & -4 & -15\\ -14 & 0 & 7\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-42+70 & 4+0 & 15-35\\ 84-84 & -8+0 & -30+42\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}28 & 4 & -20\\ 0 & -8 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 1 & -5\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix},$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 7.3.1 (сравните с примером 8.2).►

Пример 16.2. Обратим, используя (13.1), матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 2 & -4 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

Здесь $\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 2 & -4 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ -10 & 0 & 9\\ -1 & 0 & 5\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}-10 & 9\\ -1 & 5\end{vmatrix} = 41 \neq 0$. Сначала сформируем матрицу дополнительных миноров (M_{ij}), затем присоединенную матрицу $\mathbf{A}^+$ с элементами $A_{ji} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ и, наконец, найдем $\mathbf{A}^{-1}$:

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11 & 4 & 6\\ 5 & -13 & 1\\ 9 & -7 & 10\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix}-11 & -5 & 9\\ -4 & -13 & 7\\ 6 & -1 & 10\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix}-11 & -5 & 9\\ -4 & -13 & 7\\ 6 & -1 & 10\end{pmatrix}.$$

Метод ГЖ в данном случае окажется чуть более громоздким:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{c}u_2 := u_2 + 4u_1\\ u_3 := -(u_3 + u_1)\end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}-3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -10 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & -1\end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{c}u_1 := u_1 + 3u_3\\ u_2 := -(u_2 + 10u_1)\end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & -13 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 41 & 6 & -1 & 10\\ 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & -1\end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{c}u_1 := 41u_1\\ u_3 := 41u_3\end{array}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 41 & -13\cdot 41 & -82 & 0 & -123\\ 0 & 0 & 41 & 6 & -1 & 10\\ 41 & 0 & -5\cdot 41 & -41 & 0 & -41\end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{c}u_1 := u_1 + 13u_2\\ u_3 := u_3 + 5u_2\end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 41 & 0 & -4 & -13 & 7\\ 0 & 0 & 41 & 6 & -1 & 10\\ 41 & 0 & 0 & -11 & -5 & 9\end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{c}u_1 \leftrightarrow u_3\\ u_3 \leftrightarrow u_2\end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}41 & 0 & 0 & -11 & -5 & 9\\ 0 & 41 & 0 & -4 & -13 & 7\\ 0 & 0 & 41 & 6 & -1 & 10\end{array}\right).$$

Результаты, что очевидно, совпали, и проверка подтверждает правильность вычислений:

$$41\cdot\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-11 & -4 & 6\\ -5 & -13 & -1\\ 9 & 7 & 10\end{pmatrix}^{\text{т}}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 2 & -4 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c:c}33-10+18 & -11+20-9 & -22-5+27\\ 12-26+14 & -4+52-7 & -8-13+21\\ -18-2+20 & 6+4-10 & 12-1+30\end{array}\right) = 41\mathbf{E}. \blacktriangleright$$

Пример 16.3. Решить систему, представленную р.м. $(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 1 & 2 & -7\\ 2 & -4 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 0\end{array}\right)$,

используя правило Крамера.

<u>*Решение*</u>. Определитель $|\mathbf{A}| = 41$ найден в примере 16.2, поэтому осталось найти:

$$\det\mathbf{A}_1(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix}-7 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-7 & 1 & 5\\ -1 & -4 & -11\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}-7 & 5\\ -1 & -11\end{vmatrix} = 82,\ \det\mathbf{A}_2(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix}-3 & -7 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-17 & 0 & -5\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}-17 & -5\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 41,$$

$$\det\mathbf{A}_3(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix}-3 & 1 & -7\\ 2 & -4 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & 1 & -7\\ -6 & -4 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -7\\ -6 & -1\end{vmatrix} = -41,\ \text{что дает } \boldsymbol{x} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix}82\\ 41\\ -41\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}}}.$$

Проверку правильности результата предоставляется выполнить читателю. ►

§17. Переход к новому базису в аффинном пространстве

Напомним, что под аффинным мы понимаем точечно-векторное пространство $\mathbf{R^n}$(§3, замечание 3.1). Любая невырожденная матрица $\mathbf{A_n}$, как упорядоченная система $(\boldsymbol{a}_j)_\mathbf{n}$ ее векторов-столбцов, предоставляет базис этого пространства. Будем называть его **A**-базисом.

Очевидно, что переход от одного базиса (**A**-базиса) к другому (**B**-базису) состоит в выражении векторов **B**-базиса через векторы **A**-базиса. Это значит, что при решении системы уравнений $\mathbf{A}\boldsymbol{s}_j = \boldsymbol{b}_j$ (j = 1, 2,…, n) мы получаем векторы-столбцы $\boldsymbol{s}_j$ *матрицы* $\mathbf{S}$ *перехода* от старого базиса к новому. Таким образом, $\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\boldsymbol{a}_i$.

►<u>*Определение*</u> <u>17.1</u>. <u>*Матрицей перехода*</u> $\mathbf{S_n} = (s_{ij})$ от [старого] базиса $(\boldsymbol{a}_j)_\mathbf{n}$ к [новому] базису $(\boldsymbol{b}_j)_\mathbf{n}$ называется матрица, в столбцах которой записаны координаты векторов нового базиса в старом базисе. ◄

Матрица $\mathbf{S}$ – *невырожденная*, иначе мы получили бы противоречие с единственностью выражения векторов $\boldsymbol{b}_j$ через базисные векторы $\boldsymbol{a}_j$. Следовательно, справедливо соотношение **AS = B**, равносильное, при невырожденной матрице $\mathbf{S}$, соотношению $\mathbf{A} = \mathbf{BS}^{-1}$.

Одна и та же точка аффинного пространства (вектор $\boldsymbol{c}$) будет иметь в разных базисах разные координаты. Пусть $\boldsymbol{c} = (c_j)$ в **A**-базисе, но $\boldsymbol{c} = (\tilde{c}_j) = \tilde{\boldsymbol{c}}$ в **B**-базисе. Тогда

$$\boldsymbol{c} = \sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j\boldsymbol{b}_j = \sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j\sum_{i=1}^{n}s_{ij}\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}s_{ij}\tilde{c}_j\right)\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{a}_i ,$$

т.е. координаты вектора в старом и новом базисах связаны между собой соотношением

$c_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\tilde{c}_j$ для всех i = 1, 2,…, n. Последнее, согласно (5.5.1) означает, что при $\det\mathbf{S} \neq 0$

$$\boldsymbol{c} = \mathbf{S}\tilde{\boldsymbol{c}} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{c}} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{c} . \qquad (17.1)$$

Пример 17.1. Даны системы векторов, представленные матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Показать, что эти матрицы предоставляют базисы пространств $\mathbf{R}^4$; найти матрицы перехода от **A**-базиса к **B**-базису и обратно, а также связь между координатами одного и того же вектора в этих базисах.

<u>*Решение*</u>. Для выяснения того, предоставляет ли базис матрица **B**, достаточно установить ее невырожденность. Вычислим определитель матрицы **B**:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot 1 = -2 \neq 0 ,$$

что указывает на линейную независимость векторов-столбцов матрицы **B** и, следовательно, на то, что матрица **B** предоставляет базис пространства $\mathbf{R}^4$.

То же можно проделать и с матрицей **A**, но вопрос о линейную независимости ее векторов-столбцов выясняется попутно с отысканием матрицы **S** перехода от **A**-базиса к **B**-базису. Решая матричное уравнение **AS = B** относительно **S** по алгоритму, изложенному в п.1 §10, получаем:

$$\mathbf{AS = B} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \underline{s}_{1i}\ \ \underline{s}_{2i}\ \ \underline{s}_{3i}\ \ \underline{s}_{4i} \qquad\qquad\qquad \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & -5 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & -4 & 4 & -4 \end{array}\right) \end{array} \underset{\boxed{\begin{array}{c} u_2 := u_2 - u_4 \\ u_3 := u_3 - u_1 \\ u_4 := (u_4 - u_1)/2 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{c} u_1 := u_1 - u_2 - u_3 \\ u_3 := u_3 - u_4 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\mathbf{E}\ \middle|\ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \boldsymbol{s}_1 & \boldsymbol{s}_2 & \boldsymbol{s}_3 & \boldsymbol{s}_4 \end{array}\right).$$

Решение оказалось единственным, поэтому можно утверждать, что и представленная матрицей **A** система векторов также является базисом.

Поскольку матрица **S** найдена, то нам остается лишь записать соотношение (17.1), для чего можно использовать векторное представление системы уравнений:

$$\boldsymbol{c} = \mathbf{S}\tilde{\boldsymbol{c}} \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\tilde{c}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\tilde{c}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\tilde{c}_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\tilde{c}_4 .$$

Найдем теперь матрицу перехода от **B**- базиса к **A**-базису:

$$\mathbf{BT}=\mathbf{A}\;\Leftrightarrow\;\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\underline{t}_{1i} & \underline{t}_{2i} & \underline{t}_{3i} & \underline{t}_{4i}\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&2&-2&1&1&1&1\\0&-3&2&-3&1&2&1&3\\3&-5&5&-4&1&1&2&2\\3&-4&4&-4&1&1&1&3\end{array}\right)\end{array}\;\underset{\boxed{\begin{array}{l}u_3:=u_3-u_4\\u_4:=(u_4-3u_1)/2\end{array}}}{\Leftrightarrow}\;\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&2&-2&1&1&1&1\\0&-3&2&-3&1&2&1&3\\0&-1&1&0&0&0&1&-1\\0&1&-1&1&-1&-1&-1&0\end{array}\right)\;\underset{\boxed{\begin{array}{l}u_1:=u_1+2u_4\\u_4:=u_4+u_3\\u_2:=u_2-2u_3+3u_4\end{array}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\;\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1&-1&-1&1\\0&-1&0&0&-2&-1&-1&2\\0&-1&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&-1&-1&0&-1\end{array}\right)\;\underset{\boxed{\begin{array}{l}u_2:=-u_2\\u_3:=u_3+u_2\end{array}}}{\Leftrightarrow}\;\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1&-1&-1&1\\0&1&0&0&2&1&1&-2\\0&0&1&0&2&1&2&-3\\0&0&0&1&-1&-1&0&-1\end{array}\right)\;\Leftrightarrow\;\left(\mathbf{E}\left|\begin{array}{cccc}-1&-1&-1&1\\2&1&1&-2\\2&1&2&-3\\-1&-1&0&-1\\ \uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \boldsymbol{t}_1&\boldsymbol{t}_2&\boldsymbol{t}_3&\boldsymbol{t}_4\end{array}\right.\right).$$

Легко убедиться, через проверку справедливости соотношения $\mathbf{ST}=\mathbf{E_4}$, что $\mathbf{T}=\mathbf{S}^{-1}$. Соответственно получаем выражение координат вектора в новом базисе через его координаты в старом:

$$\tilde{\boldsymbol{c}}=\mathbf{T}\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\tilde{\boldsymbol{c}}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot c_1+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot c_2+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot c_3+\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-1\end{pmatrix}\cdot c_4\,.\blacktriangleright$$

§18. Подпространства линейного пространства

►*Определение* 18.1. **[*Линейным*] *подпространством*** $\tilde{\mathbf{L}}$ *линейного пространства* **L** (над числовым полем *F*) называют *непустое* подмножество $\tilde{\mathbf{L}}\subset\mathbf{L}$ такое, что линейные операции (сложения векторов и умножения их на число) над элементами из $\tilde{\mathbf{L}}$ не выводят результат за пределы $\tilde{\mathbf{L}}$, т.е. для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\tilde{\mathbf{L}}$ и любого λ из F справедливо $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\in\tilde{\mathbf{L}}$, $(\lambda\boldsymbol{x})\in\tilde{\mathbf{L}}$.◄

Введенное выше требование означает *замкнутость* подпространства $\tilde{\mathbf{L}}$ относительно указанных линейных операций.

Нетрудно показать, что любое подпространство содержит в себе нуль-вектор. В самом деле, если $\boldsymbol{x}\in\tilde{\mathbf{L}}$, то и $0\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\in\tilde{\mathbf{L}}$. Для любого $\boldsymbol{x}\in\tilde{\mathbf{L}}$ имеем также $(-1)\cdot\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}\in\tilde{\mathbf{L}}$, т.е. любой элемент подпространства имеет противоположный ему. Поскольку все другие аксиомы линейного пространства (см. §1) выполняются автоматически, то можно утверждать, что *любое подпространство линейного пространства само является линейным пространством*.

Это означает, что можно говорить о *базисе подпространства* $\tilde{\mathbf{L}}$ и его *размерности* $\dim(\tilde{\mathbf{L}})$ как о количестве векторов, составляющих базис. Заметим, что базисные векторы подпространства, как и все другие его элементы, имеют размерность самого пространства.

Подпространства $\{\boldsymbol{0}\}$ и **L** как подмножества **L** называют *несобственными*, а все остальные – *собственными подпространствами* пространства **L**.

Любое подпространство $\tilde{\mathbf{L}}$ пространства **L** является подмножеством последнего, но не всякое подмножество $\tilde{\mathbf{L}}\subset\mathbf{L}$ является подпространством пространства **L**. Например, подмножество *всех* векторов пространства $\mathbf{R^n}$, имеющих хотя бы одну нулевую координату, является подпространством, а подмножество *всех* векторов с хотя бы одной фиксированной ненулевой координатой подпространством не является (это подмножество заведомо не содержит нулевого вектора).

►*Определение* 18.2. Множество всех линейных комбинаций векторов системы $\{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{m}$, т.е. множество $\{\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{a}_i c_i\}$, где c_i – произвольные числа из поля *F*, называется ***линейной оболочкой*** $Lin\{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{m}$ этой системы. Говорят также, что множество $Lin\{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{m}$ натянуто на систему векторов $\{\boldsymbol{a}_i\}_\mathbf{m}$. ◄

Условимся далее обозначать размерность подпространства, как и размерность пространства, верхним индексом: $\widetilde{\mathbf{L}}^{\mathbf{m}}$ – подпространство (пространства $\mathbf{L}^{\mathbf{n}}$) размерности m.

Линейная оболочка <u>*базиса*</u> $(\boldsymbol{e}_i)_{\mathbf{n}}$ пространства $\mathbf{L}$ описывает, что очевидно, само пространство $\mathbf{L}^{\mathbf{n}}$: $Lin(\boldsymbol{e}_i)_{\mathbf{n}} = \mathbf{L}$. Аналогично, линейная оболочка *базиса* $(\boldsymbol{f}_i)_{\mathbf{r}}$ векторов *подпространства* $\widetilde{\mathbf{L}}^{\mathbf{r}}$ ($\boldsymbol{f}_i \in \mathbf{L}^{\mathbf{n}}$) полностью описывает это подпространство: $Lin(\boldsymbol{f}_i)_{\mathbf{r}} = \widetilde{\mathbf{L}}^{\mathbf{r}}$.

►<u>*Определения*</u> <u>18.3</u>. Пусть $\widetilde{\mathbf{L}}$ и $\widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$ – подпространства пространства $\mathbf{L}$. Тогда подпространство $\widetilde{\mathbf{L}} \cap \widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$ векторов $\boldsymbol{x}$ таких, что $\boldsymbol{x} \in \widetilde{\mathbf{L}}$ и $\boldsymbol{x} \in \widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$ одновременно, называется <u>*пересечением*</u>, а подпространство $\widetilde{\mathbf{L}} + \widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$ векторов $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y} \in \widetilde{\mathbf{L}}$, а $\boldsymbol{z} \in \widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$,– <u>*алгебраической суммой*</u> подпространств $\widetilde{\mathbf{L}}$ и $\widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$. Если $\widetilde{\mathbf{L}} \cap \widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}} = \{\boldsymbol{0}\}$, то подпространство $\widetilde{\mathbf{L}} + \widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$ называют <u>*прямой суммой*</u> подпространств $\widetilde{\mathbf{L}}$ и $\widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$ и обозначают как $\widetilde{\mathbf{L}} \oplus \widetilde{\widetilde{\mathbf{L}}}$. Подпространство $\widetilde{\mathbf{L}}^{+}$ такое, что $\widetilde{\mathbf{L}} \oplus \widetilde{\mathbf{L}}^{+} = \mathbf{L}$, называется <u>*алгебраическим дополнением*</u> подпространства $\widetilde{\mathbf{L}}$ до $\mathbf{L}$; при этом алгебраическое дополнение подпространства $\widetilde{\mathbf{L}}^{\mathbf{k}}$ до $\mathbf{L}^{\mathbf{n}}$ обозначается как $\widetilde{\mathbf{L}}^{\mathbf{k}+}$, а алгебраическое дополнение (подпространства $\widetilde{\mathbf{L}}$) размерности k – как $\widetilde{\mathbf{L}}^{+\mathbf{k}}$.◄

Пересечение любых двух подпространств является непустым подпространством, поскольку обязательно содержит в себе $\boldsymbol{0}$-вектор.

Способы задания подпространства в $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Пусть дана произвольная система $\{\boldsymbol{f}_i\}_{\mathbf{m}}$ векторов $\boldsymbol{f}_i \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, представленная матрицей $\mathbf{F}_{\mathbf{n*m}}$, имеющей ранг $r = rg(\mathbf{F}) \neq 0$. Это означает, что данная система векторов-столбцов имеет хотя бы одну линейно независимую подсистему $\{\boldsymbol{f}_i\}_{\mathbf{r}}$, предоставляющую нам базис $(\boldsymbol{f}_i)_{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\mathbf{n*r}}$ подпространства $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} = Lin(\boldsymbol{f}_i)_{\mathbf{r}}$. В этом состоит *прямой* (*внутренний*) способ задания подпространства. Вопрос о линейной

Очевидно также, что отыскание базиса подпространства $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}}$ можно произвести через решение СЛУ Пусть также подпространство $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}}$ – собственное ($0 < r < n$). Найдем его алгебраическое дополнение $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}+}$. Для этого достаточно решить СЛУ $(\mathbf{F}_{\mathbf{n*r}})^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Получаем:

$$(\mathbf{F}_{\mathbf{n*r}})^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n-r} \boldsymbol{g}_i \cdot c_i = \mathbf{G}_{\mathbf{n*(n-r)}} \cdot \boldsymbol{c}, \text{ где } \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n-r}}.$$

Система векторов $\{\boldsymbol{g}_i\}_{\mathbf{n-r}}$, представляющая ф.с.р. рассмотренной выше СЛУ, является одним из базисов искомого алгебраического дополнения $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}+}$: $Lin\{\boldsymbol{g}_i\}_{\mathbf{n-r}} = \widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}+} = \widetilde{\mathbf{R}}^{+(\mathbf{n-r})}$.

СЛУ $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ с решением $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{f}_i \cdot c_i = \mathbf{F}_{\mathbf{n*r}} \cdot \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^{\mathbf{r}}$, дает нам ф.с.р. $\{\boldsymbol{f}_i\}_{\mathbf{r}}$ и базис $(\boldsymbol{f}_i)_{\mathbf{r}}$ исходного подпространства $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} = Lin(\boldsymbol{f}_i)_{\mathbf{r}}$, причем в общем случае отличный от исходного базиса.

Очевидно, что СЛУ $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ с произвольной матрицей $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{m*n}}$, имеющей ранг $r = rg(\mathbf{A}) \neq 0$, также описывает, посредством своей ф.с.р. $\{\boldsymbol{g}_i\}_{\mathbf{n-r}} = \mathbf{G}_{\mathbf{n*(n-r)}}$, некоторое подпространство $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{n-r}}$ пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Этот способ задания подпространства называют к*освенным*, или *внешним*. Теперь общее решение СЛУ $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ с ф.с.р. $\{\boldsymbol{f}_i\}_{\mathbf{r}}$ предоставит нам один из базисов $(\boldsymbol{f}_i)_{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\mathbf{n*r}}$ алгебраического дополнения $\widetilde{\mathbf{R}}^{+\mathbf{r}}$ подпространства $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{n-r}}$ до $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$: $\widetilde{\mathbf{R}}^{+\mathbf{r}} = Lin(\boldsymbol{f}_i)_{\mathbf{r}}$, а система уравнений $\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ также будет задавать подпространство $\widetilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{n-r}}$. При этом, вообще говоря, система $\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ может отличаться от исходной системы $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Поясним все сказанное выше на примере.

Пример 18.1. Найти базис линейного подпространства $\widetilde{\mathbf{R}}$, натянутого на систему векторов-столбцов матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, базис алгебраического дополнения $\widetilde{\mathbf{R}}^{+}$ подпространства $\widetilde{\mathbf{R}}$ до $\mathbf{R}^{5}$, а также системы уравнений, задающие $\widetilde{\mathbf{R}}$ и $\widetilde{\mathbf{R}}^{+}$.

<u>Решение</u>. Примем к рассмотрению систему $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ с целью найти какую-либо базу данной нам системы векторов (базис подпространства $\tilde{\mathbf{R}}$). Используем метод ГЖ:

$$\begin{array}{c} \underline{x}_1\ \underline{x}_2\ \underline{x}_3\ \underline{x}_4\ \underline{x}_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot c_2 = \boldsymbol{f}_1 \cdot c_1 + \boldsymbol{f}_2 \cdot c_2.$$

$u_3 := u_3 - u_1 - u_2$
$u_4 := (u_4 - u_1)/2$
$u_2 := u_2 - u_4$
$u_1 := u_1 + u_5$

$u_2 := u_2 + u_4$
$u_4 := u_4 + 2u_5 - 2u_1$
$u_4 := u_4$

Проверку решения проведем, с учетом замечания 5.2, по алгоритму (9.2). Имеем:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} 1+0+1-2+0 & 0+1-1+0+0 \\ 1+0-1+2-2 & 0+1+1+0-2 \\ 2+0+0+0-2 & 0+2+0+0-2 \\ 1+0+5-10+4 & 0+1-5+0+4 \\ 1+0-1+0+0 & 0-1+1+0+0 \end{array}\right) = \mathbf{\Theta}_{5*2}, \text{ – решение верно.}$$

Полученую выше ф.с.р. можно записать в виде матрицы $\mathbf{F}_{5*2} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$. Столбцы этой матрицы являются *одним из базисов* алгебраического дополнения $\tilde{\mathbf{R}}^{+2}$ исходного подпространства $\tilde{\mathbf{R}}$. Иначе говоря, $\tilde{\mathbf{R}}^{+2} = Lin(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$. С другой стороны, это говорит о том, что данная нам матрица $\mathbf{A}$ предоставляет *один из его базисов* подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$ размерности 3, в частности базис, представленный системой векторов-столбцов ($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$).

Итак, и исходная, и любая из появляющихся по ходу решения система уравнений задают подпространство $\tilde{\mathbf{R}}^3$. Одной из них (неизбыточной по числу уравнений) является система

$$\begin{array}{c} \underline{x}_1\ \ \underline{x}_2\ \ \underline{x}_3\ \underline{x}_4\ \underline{x}_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Она не единственна: любые три различные нетривиальные л.к. этих уравнений также описывают найденное $\tilde{\mathbf{R}}^{+2}$. Решения этих систем могут быть различными по своей форме, но будут представлять все то же множество векторов, что и линейная оболочка векторов-столбцов найденной нами матрицы $\mathbf{F}_{5*2} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$.

Итак, базис алгебраического дополнения $\tilde{\mathbf{R}}^{+2}$ подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$ до $\mathbf{R}^5$ предоставляет нам матрица $\mathbf{F}_{5*2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, а система $\begin{array}{c} \underline{x}_1\ \underline{x}_2\ \ \underline{x}_3\ \ \ \underline{x}_4\ \underline{x}_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array}$ с ее решением

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_3 = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{g}_i \cdot c_i$ описывает, через свою ф.с.р. (составляющую матрицу $\mathbf{G}_{5*3}$), подпространство $\tilde{\mathbf{R}}^3$.

С другой стороны, матрица $\mathbf{F}_{5*2} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ предоставляет нам один из базисов алгебраического дополнения $\tilde{\mathbf{R}}^{3+} = \tilde{\mathbf{R}}^{+2}$ подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$ до $\mathbf{R}^5$. Решение же системы $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ приводит нас к одному из базисов подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$ (не связанному, вообще говоря, с матрицей $\mathbf{A}$).

Решение системы $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ можно записать и как $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{c}) = \mathbf{G}\cdot\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ – произвольный вектор из $\mathbf{R}^3$. Поскольку матрица $\mathbf{G}$ задает один из базисов подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$, то (через л.к. ее столбцов) можно найти матрицу $\mathbf{C}_{3*5}$, векторы-столбцы которой состоят из коэффициентов линейных комбинаций базисных векторов, дающих все столбцы исходной матрицы $\mathbf{A}$. Для этого достаточно решить, относительно $\mathbf{C}$, матричное уравнение $\mathbf{G}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}$ (см. §10, п.1):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{x_{1i}} & \underline{x_{2i}} & \underline{x_{3i}} \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{\begin{array}{c} u_1 := u_1 + u_3 - 2u_4 + 2u_5 \\ u_2 := u_2 - u_3 + 2u_5 \end{array}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrrrr} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (\mathbf{E}_3|\mathbf{C}_{3*5}).$$

В данном случае структура матрицы **G** такова, что координаты каждого из векторов $\boldsymbol{c}_i$ суть три последние координаты соответствующего вектора $\boldsymbol{a}_i$:

$$\boldsymbol{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_1; \quad \boldsymbol{x}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_2; \quad \boldsymbol{x}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_3; \quad \boldsymbol{x}\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_4; \quad \boldsymbol{x}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_5.$$

В более общем случае координаты векторов $\boldsymbol{c}_i$ являются теми координатами векторов $\boldsymbol{a}_i$, которые соответствуют свободным неизвестным, к которым привязан заведомо ненулевой минор матрицы **G**.

Базисы подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$, предоставляемые матрицей **A**, можно найти, выясняя вопрос о линейной независимости системы векторов через решение системы уравнений $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (см. пример 8.1).

Линейно независимыми оказались связанные со столбцами матрицы $\mathbf{E}_5$ векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{a}_5$, представляющими базис подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$. Дальнейшие действия повторяют, в принципе, первый вариант решения задачи и проходят в два этапа.

<u>*Этап 1.*</u> Формируем из векторов базиса подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$ (или из системы векторов, на которую оно натянуто), матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$ и решаем систему $\tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, задающую $\tilde{\mathbf{R}}^{3+}$ – алгебраическое дополнение подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{x_3} & \underline{x_4} & \underline{x_5} \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{\begin{array}{c} u_1 := u_1 + u_3 \\ u_2 := -u_2;\ u_3 := -u_3 \end{array}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^2. \quad (*)$$

Найден базис алгебраического дополнения $\tilde{\mathbf{R}}^{3+}$ подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$.

<u>*Этап 2.*</u> Решаем задающую $\tilde{\mathbf{R}}^3$ систему $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{x_3} & \underline{x_4} & \underline{x_5} \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} \mathbf{1} & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\boldsymbol{c}} = \mathbf{G}\cdot\tilde{\boldsymbol{c}}, \tilde{\boldsymbol{c}} \in \mathbf{R}^3. \quad (**)$$

Получен базис подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$. Система $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ совпадает, с точностью до перестановки уравнений, с системой, полученной на этапе 1.

Таким образом, полученные выше матрицы **F** и **G** содержат в себе полную информацию о подпространстве и его алгебраическом дополнении, включая взаимосвязь между внутренним и внешним способами их задания.

Полученная на этапе (*) ф.с.р. не связана с базисом алгебраического дополнения $\tilde{\mathbf{R}}^2$ нашего подпространства $\tilde{\mathbf{R}}^3$. Дело в том, что мы имеем дело с *другим* подпространством – натянутым не на векторы-столбцы, а на векторы-строки матрицы **A**. ►

Пример 18.2. Найти СЛУ, задающую линейное подпространство, натянутое на векторы-столбцы матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>. Следуем алгоритму, использованному в предыдущем примере.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ \Leftrightarrow \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \ \underline{x_2}\ \ \underline{x_3}\ \ \underline{x_4}\ \ \underline{x_5}\qquad \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&-1&1&-1&1&0\\ 1&1&0&0&3&0\\ 3&1&1&-1&7&0\\ 0&2&-1&1&2&0 \end{array}\right)\end{array} \underset{\boxed{\begin{array}{c} u_3:=u_3-u_1-2u_2\\ u_4:=-u_4+u_1-u_2\\ u_1:=u_1+u_2\end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2&0&\mathbf{1}&-1&4&0\\ 1&\mathbf{1}&0&0&3&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ -1&0&-3\\ -2&1&-4\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{c}=\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^3$$

Искомая система (она не единственна!) имеет, таким образом, вид: $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3=0,\\ x_3+x_4=0,\\ -3x_2-4x_3+x_5=0.\end{cases}$ ▶

Пример 18.3. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$, натянутых соответственно на векторы-столбцы матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ и матрицы $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>. Найдем системы уравнений, задающие $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$. Для этого достаточно найти базисы подпространств $\mathbf{R}_1^+$ и $\mathbf{R}_2^+$.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ \Leftrightarrow \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \ \underline{x_2}\ \ \underline{x_3}\ \ \underline{x_4}\qquad \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0 \end{array}\right)\end{array} \underset{\boxed{\begin{array}{c} u_2:=u_2-u_3\\ u_1:=u_1-u_2\end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1}&0&0&1&0\\ 0&\mathbf{1}&0&-1&0\\ 0&0&\mathbf{1}&1&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot c=\mathbf{F}\cdot c,\ c\in\mathbf{R}$$

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ \Leftrightarrow \begin{array}{c} \underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \ \underline{x_3}\ \underline{x_4}\qquad \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1&0&1&0&0\\ 0&2&1&1&0\\ 1&2&1&2&0 \end{array}\right)\end{array} \underset{\boxed{\begin{array}{c} u_3:=(u_3-u_1)/2\\ u_2:=u_2-u_3\end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1}&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&1&0&\mathbf{1}&0 \end{array}\right) \underset{\boxed{u_1:=u_1-u_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1}&-1&0&0&0\\ 0&1&\mathbf{1}&0&0\\ 0&1&0&\mathbf{1}&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot c=\mathbf{G}\cdot c,\ c\in\mathbf{R}$$

Теперь базис пересечения $\mathbf{R_1}\cap\mathbf{R_2}$ будет представлен ф.с.р. системы:

$$\begin{array}{c} \underline{x_1}\ \ \underline{x_2}\quad \underline{x_3}\ \ \underline{x_4}\qquad \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} -1&1&-1&1&0\\ 1&1&-1&-1&0 \end{array}\right)\end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0&1&-1&0&0\\ 1&0&0&-1&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{c}=\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^2,$$

т.е. векторами-столбцами матрицы $\mathbf{H}$.

Базис суммы $\mathbf{R_1}+\mathbf{R_2}$ найдется, что очевидно, через объединение данных нам систем векторов. Выясним, какие из векторов окажутся линейно независимыми:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr|r} 1&0&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&2&2&0\\ 0&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&2&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr|r} 0&0&0&1&-1&-1&0\\ 1&0&0&-1&2&3&0\\ 0&1&0&1&0&-1&0\\ 0&0&1&0&1&2&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr|r} 0&0&0&\mathbf{1}&-1&-1&0\\ \mathbf{1}&0&0&0&1&2&0\\ 0&\mathbf{1}&0&0&1&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&0&1&2&0 \end{array}\right).$$

Как оказалось, это векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1$. Следовательно, $\dim(\mathbf{R_1}+\mathbf{R_2})=4$, а указанная система векторов представляет один из базисов пространства $\mathbf{R}^4$.

Можно было действовать по-другому, решая систему:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0\\ \hline 1&0&1&0&0\\ 0&2&1&1&0\\ 1&2&1&2&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1}&0&0&1&0\\ 0&\mathbf{1}&0&-1&0\\ 0&0&\mathbf{1}&1&0\\ \hline 1&-1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1}&0&0&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\mathbf{1}&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

а это говорит о том, что базисом суммы $\mathbf{R_1}+\mathbf{R_2}$ могут быть и векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_3$.

Выразим все оставшиеся векторы через базисные:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rr} 1&0&0&1&0&1\\ 1&1&0&2&2&0\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&2&1&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|rr} 0&0&0&-2&-2&2\\ 1&0&0&3&2&-1\\ 0&1&0&-1&0&1\\ 0&0&1&2&1&0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|rr} 0&0&0&1&1&-1\\ 1&0&0&0&-1&2\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&-1&2 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$; $\boldsymbol{b}_2=-\boldsymbol{b}_3+2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_3$. ▶

§19. Собственные векторы и собственные значения числовой матрицы

►*Определение 19.1.* Собственным вектором числовой матрицы $\mathbf{A_n}$ называют *ненулевой* вектор $\boldsymbol{s}$ такой, что $\mathbf{A}\boldsymbol{s} = \lambda\boldsymbol{s}$, где λ – некоторое число из поля F, называемое собственным числом (значением) этой матрицы.◄

Очевидно, что уравнение $\mathbf{A}\boldsymbol{s} = \lambda\boldsymbol{s}$ равносильно однородной системе

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\,\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}, \tag{19.1}$$

заведомо имеющей нулевое решение. Нас интересуют *ненулевые* решения этой системы, т.е. случай ее неопределенности. Для всех $k = 1, 2,..., n$ имеем $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})_k(\boldsymbol{0}) = 0$, поэтому из соотношения (12.1), использованного нами для получения правила Крамера, вытекает, что система (19.1) будет неопределенной при условии $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = 0$. Это дает нам *характеристическое уравнение*

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = 0, \tag{19.2}$$

левая часть которого является многочленом $P_{\text{n}}(\lambda)$ степени n относительно переменной λ (т.н. *характеристическим многочленом* матрицы $\mathbf{A}$; матрица $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ называется *характеристической матрицей* матрицы $\mathbf{A}$). Уравнение (19.2) позволяет найти *все* собственные значения матрицы $\mathbf{A}$.

Найдем *характеристический многочлен* $P_{\text{n}}(\lambda) = |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ матрицы $\mathbf{A}$, пользуясь свойством 4° (см. §14) определителей:

$$\det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{b}) + \det\mathbf{A}_k(\boldsymbol{c}).$$

Применив это свойство и теорему о разложении к первому столбцу, получим:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31}+0 & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \hdotsfor{5} \\ a_{n1}+0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \hdotsfor{5} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}+0 & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \hdotsfor{5} \\ a_{n1} & a_{n2}+0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} - \lambda\cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Выполняя такие же операции со вторым, третьим и т.д. столбцами *первого слагаемого*, мы приходим к выражению

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{A}| - \lambda\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mathcal{M}}_k^{n-1},$$

где $\tilde{\mathcal{M}}_k^{n-1}$ – главные (см. замечание 13.1) миноры порядка $(n-1)$ определителя $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$.

Каждый из этих главных миноров раскладывается по такому же алгоритму, порождая сумму главных миноров $\mathcal{M}_k^{n-1}$ порядка $(n-1)$ определителя $|\mathbf{A}|$ и сумму главных миноров порядка $(n-2)$ определителя $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ с дополнительным множителем $(-\lambda)$. Теперь

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{A}| - \lambda\left(\sum_{k=1}^{n_1}\mathcal{M}_k^{n-1} - \lambda\sum_{k=1}^{n_2}\tilde{\mathcal{M}}_k^{n-2}\right).$$

Далее будем иметь $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{A}| - \lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{N_1}\mathcal{M}_k^{n-1} - \lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{N_2}\mathcal{M}_k^{n-2} - \lambda\sum\limits_{k=1}^{N_3}\tilde{\mathcal{M}}_k^{n-3}\right)\right)$ и т.д. В конечном итоге получаем:

$$P_{\text{n}}(\lambda) = |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = c_0 - c_1\lambda + c_2\lambda^2 - c_3\lambda^3 + c_4\lambda^4 - \ldots + (-1)^{n-1}c_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k\lambda^k, \tag{19.3}$$

где $c_k = \sum\limits_{i=1}^{C_n^k}\mathcal{M}_i^{n-k}$ – суммы всех главных миноров порядка $(n-k)$ определителя $|\mathbf{A}|$ для $k = 1, 2,\ldots, n\text{-}1$; $c_n = 1$.

Решая уравнение $P_{\text{n}}(\lambda) = 0$, мы найдем все различные собственные числа (образующие <u>*спектр*</u> матрицы $\mathbf{A}$), а затем, для каждого собственного числа, из систем вида (19.1) – собственные векторы.

▼**Замечание 19.1.** Главными минорами порядка 1 являются диагональные элементы матрицы **A**, а их сумма образует так называемый <u>*след*</u> матрицы **A**. ▲

Пример 19.1. Найдем собственные векторы матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен матрицы **A** имеет вид: $P_n(\lambda) = c_0 - c_1\lambda + c_2\lambda^2 - c_3\lambda^3 + \lambda^4$. Здесь c_0 – единственный (он же главный) минор порядка 4:

$$c_0 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -15 & 7 & 5 & -6 \\ -26 & 12 & 8 & -11 \\ -7 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 & 7 & -6 \\ -26 & 12 & -11 \\ -7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & -11 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Главные миноры порядка 3 находятся в строках и столбцах с номерами (1,2,3), (1,2,4), (1,3,4) и (2,3,4), поэтому:

$$c_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 5 \\ 6 & -12 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & -8 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 5 & 4 \\ -12 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & 7 & 5 \\ -14 & 12 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & -11 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-96+98) + 3\cdot(-2)\cdot 2 - (8-33) + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 + 25 + (9-12) = 12.$$

Главные миноры порядка 2 выбираются из строк и столбцов с номерами (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), и (3,4), поэтому:

$$c_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ -12 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -17 + 26 + 6 - 4 - 4 + 6 = 13.$$

Находим сумму главных миноров порядка 1 (<u>*след*</u> матрицы **A**):

$$c_3 = 4 - 8 + 8 + 2 = 6.$$

Таким образом, $P_n(\lambda) = 4 - 12\lambda + 13\lambda^2 - 6\lambda^3 + \lambda^4 = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$.

Можно найти характеристический многочлен, используя общие правила вычисления определителей:

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8-\lambda & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8-\lambda & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 9-3\lambda & -7+2\lambda & -2+\lambda \\ 5 & 7-\lambda & -5 & -1 \\ 6 & 6 & -4-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4-\lambda & -7+2\lambda & -2+\lambda \\ 7-\lambda & -5 & -1 \\ 6 & -4-\lambda & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & 9-3\lambda & -7+2\lambda \\ 5 & 7-\lambda & -5 \\ 6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3+2\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 6 & -4-\lambda & -1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & 5-2\lambda & -3+2\lambda \\ 5 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -5-\lambda & -2+\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & -1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 5 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -2+\lambda & \lambda \\ 2-\lambda & -1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3+\lambda \\ 5 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3+\lambda \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda-2) + (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2+3-\lambda) =$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-2)\cdot[-1+\lambda-1] = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2.$$

Остается найти собственные векторы. Для собственного числа $\lambda = 1$ получаем систему $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, решение которой приводится ниже:

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \to \\ u_2 \to \\ u_3 \to \\ u_4 \to \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}
\underset{\boxed{\begin{array}{l} u_2 := u_2 - 3u_1 \\ u_3 := u_3 - 4u_1 \\ u_4 := u_4 - u_1 \end{array}}}{\Leftrightarrow}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}
\underset{\boxed{\begin{array}{c} \textit{удаляем} \\ u_2 \textit{ и } u_3 \end{array}}}{\Leftrightarrow}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow$$

$u_1 := -(u_1 - u_2)$
$u_2 := 3u_2$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x_1 = 3x_1 \\ 3x_2 = 5x_1 + 3x_4 \\ 3x_3 = 6x_1 + 3x_4 \\ 3x_4 = \quad 3x_4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 = \boldsymbol{s}_1 c_1 + \boldsymbol{s}_2 c_2,$$

где $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ – искомые собственные векторы (как векторы ф.с.р. нашей однородной СЛУ).

Для собственного числа $\lambda = 2$ имеем систему $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, которая дает нам еще один собственный вектор ($\boldsymbol{s}_3$) матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \to \\ u_2 \to \\ u_3 \to \\ u_4 \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -10 & 5 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow$$

$u_3 := u_3 - 3u_1$
$u_1 := u_1 - 2u_4$
$u_2 := u_2 - 5u_4$

$u_1 := u_1 + u_3$
$u_2 := (u_2 - 4u_1)/5$
$u_3 := (u_3 + u_1)/(-3)$

удаляем u_2
$u_4 := u_4 + 3u_3$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_3 = \boldsymbol{s}_3 c_3.$$

Таким образом, данная по условию задачи матрица имеет три собственных вектора, представляющих фундаментальные системы решений двух рассмотренных однородных систем.

Проверим результат, сформировав из полученных векторов матрицу $\mathbf{S} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3)$:

$$\mathbf{AS} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 \\ -3 & -8 & -12 & -3 \\ 1 & 5 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-15+6 & -3+1+2 & 4-3+1 \\ 15-40+30 & -8+5+4 & 5-8+5 \\ 18-60+48 & -12+8+5 & 6-12+8 \\ 3-15+12 & -3+2+2 & 1-3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что мы получили требуемые определением собственного вектора соотношения: $\mathbf{A}\boldsymbol{s}_1 = 1\cdot\boldsymbol{s}_1$, $\mathbf{A}\boldsymbol{s}_2 = 1\cdot\boldsymbol{s}_2$, $\mathbf{A}\boldsymbol{s}_3 = 2\cdot\boldsymbol{s}_3$.

§20. Евклидовы пространства

В дальнейшем нам понадобится понятие *длины* вектора. Строго говоря, это понятие, как и понятие *угла* между векторами, можно использовать только в метрических пространствах, к числу которых относится и евклидовы пространства как пространства со скалярным произведением.

Пусть любой *упорядоченной* паре $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ двух элементов (векторов) из линейного пространства $\mathbf{L}$ над числовым полем F ставится в соответствие, по некоторому закону, число $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ из того же поля F. Тогда, если этот закон обеспечивает выполнение, для любых элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ из $\mathbf{L}$ и любого числа α из F, трех аксиом:

1°. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}$, где горизонтальная черта есть символ комплексного сопряжения,

2°. $(\alpha\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$,

3°. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$, –

то об этом пространстве говорят как о *пространстве со скалярным произведением* $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$.

Если, кроме того, потребовать выполнения еще одной аксиомы:

4°. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \ge 0$, причем из $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

то такое пространство называют *евклидовым пространством* (*E-пространством*).

Евклидово пространство над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел называют также *унитарным*, или *эрмитовым*.

Аксиома 1° позволяет установить, что:

2.1°. $\boldsymbol{x}\cdot(\alpha\boldsymbol{y}) = \overline{((\alpha\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{x})} = \overline{(\alpha(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}))} = \bar{\alpha}\,\overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}} = \bar{\alpha}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$, т.е. $\boldsymbol{x}\cdot(\alpha\boldsymbol{y}) = \bar{\alpha}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$;

3.1°. $\boldsymbol{z}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}} = \overline{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z})} = \overline{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}} + \overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y}$, т.е. $\boldsymbol{z}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y}$;

4.1°. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} \in R$, т.е. *скалярный квадрат* $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x}$, обозначаемый также как $\boldsymbol{x}^2$, является *вещественным*, причем неотрицательным, числом для евклидова пространства над любым полем.

Свойство 4.1° дает возможность определить <u>длину</u> x вектора $\boldsymbol{x}$ как $x = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2}$.

Отсюда имеем $|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^2$, а применяя 4.1° к $\boldsymbol{0}$-вектору, получим $|\boldsymbol{0}| = 0$. Кроме того, $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0$ для любого $\boldsymbol{x}$ из Е-пространства.

В векторном Е-пространстве над полем R (вещественном Е-пространстве) скалярное произведение можно определить, для векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$ (в некотором базисе) как

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ ; \qquad (20.1)$$

в унитарном пространстве – как

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i\ ; \qquad (20.2)$$

в пространстве функций действительной переменной x, непрерывных на отрезке $[a;b]$ с элементами $\boldsymbol{f} = f(x)$, $\boldsymbol{g} = g(x)$ – как

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,. \qquad (20.3)$$

Справедливость всех аксиом Е-пространства во всех трех случаях легко проверяется (сделайте это самостоятельно, используя свойства комплексных чисел и определенного интеграла).

20.1. Ортогональные векторы и «теорема Пифагора». Если упорядоченная пара $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ такова, что $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$, то вектор $\boldsymbol{x}$ называют *ортогональным* вектору $\boldsymbol{y}$, что обозначается как $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$. Так как $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 = \bar{0} = \overline{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$, то и $\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x}$, т.е. условие $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$ обеспечивает <u>*взаимную*</u> ортогональность векторов:

$$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x}\,. \qquad (20.4)$$

Для двух взаимно ортогональных векторов имеем, на основании аксиомы 3° и 3.1°, $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}$, т.е.

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^2 = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2, \qquad (20.5)$$

что является аналогом теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

20.2. Неравенство Коши – Буняковского. Докажем, что в унитарном пространстве (евклидовом пространстве над полем комплексных чисел) имеет место соотношение:

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|. \qquad (20.6)$$

Если один из векторов – нулевой, то выполнение (20.6) очевидно. Для ненулевых же векторов введем в рассмотрение вектор $\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}$, для которого $(\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y})^2 \ge 0$. Раскрывая левую часть, получаем: $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}\cdot(\alpha\boldsymbol{y}) - (\alpha\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{x} + (\alpha\boldsymbol{y})\cdot(\alpha\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 - \bar{\alpha}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) - \alpha(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}) + \bar{\alpha}\,\alpha\boldsymbol{y}^2 \ge 0$.

Учитывая, что α и скалярные произведения $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ – комплексные числа, сделаем подстановку $\alpha = \beta\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|}$, где β – *любое* действительное число. Тогда $\bar{\alpha} = \beta\dfrac{\overline{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|}$, и мы приходим к неравенству: $\boldsymbol{x}^2 - \beta\dfrac{\overline{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|} - \beta\dfrac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\overline{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})}}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|} + \beta^2\dfrac{\overline{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|^2}\boldsymbol{y}^2 \ge 0$, а в силу того, что $\overline{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|^2$, окончательно имеем, относительно действительного β, неравенство $\boldsymbol{x}^2 - 2\beta\cdot|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| + \beta^2\boldsymbol{y}^2 \ge 0$, которое должно выполняться для *всех* β. Это возможно только при условии $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|^2 - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2 \le 0$, что дает неравенство $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|^2 \le |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2$, равносильное (20.6).

Естественно, неравенство Коши – Буняковского справедливо и <u>в евклидовом пространстве над полем R</u>. Более того, поскольку из (20.6) для ненулевых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ непосредственно вытекает $\dfrac{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \dfrac{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|}{xy} \le 1$, то это позволяет определить <u>*угол*</u> φ между ненулевыми векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в таком (вещественном!) пространстве посредством

$$\varphi = \arccos \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{xy}. \tag{20.7}$$

Для взаимно ортогональных векторов имеем $\varphi = \pi/2$. В случае, когда хотя бы один из векторов – нулевой, этот угол считается неопределенным и может быть взят любым из промежутка $[0; \pi]$.

20.3. Ортогональный и ортонормированный базисы. Рассмотрим векторную систему $\{\boldsymbol{f}_i\}_{\mathbf{n}}$ с конечным или бесконечным n в пространстве **E** над полем F. Пусть векторы $\boldsymbol{f}_i$ этой системы – ненулевые и попарно ортогональны, т.е. для всех i и для всех $j \neq i$ выполняется условие $\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{f}_j = 0$, причем $\boldsymbol{f}_i^2 > 0$. Исследуем линейную зависимость системы $\{\boldsymbol{f}_i\}_{\mathbf{n}}$, используя определение 2.1. Для этого рассмотрим уравнение $\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{0}$, левая часть которого есть л.к. векторов $\boldsymbol{f}_j$ с числовыми коэффициентами x_j. Домножая скалярно обе его части на $\boldsymbol{f}_i$ и используя аксиомы 1º – 4º Е-пространства, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j (\boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{f}_i) = x_i (\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{f}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Это означает, что рассмотренная выше л.к. оказалась тривиальной, а система векторов – линейно независимой. Как следствие, на попарно ортогональных ненулевых векторах можно строить базис пространства.

Пусть Е-пространство имеет базис, состоящий из n векторов $\boldsymbol{g}_i$. Построим на этих векторах ***ортогональный базис*** $\{\boldsymbol{f}_i\}_{\mathbf{n}}$, последовательно получая векторы $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, …, $\boldsymbol{f}_n$. Каждый последующий k-вектор $\boldsymbol{f}_k$, начиная со второго, будем искать, используя уже найденные $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{k-1}$, в виде:

$$\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{g}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{k,i} \boldsymbol{f}_i, \tag{20.8}$$

где $\beta_{k,i}$ – числовые коэффициенты, подлежащие отысканию. Умножая (20.8) скалярно на уже найденные $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{k-1}$, получаем $\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{f}_j - \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{k,i} (\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{f}_j)$, что приводит к

$$\beta_{k,j} = \frac{\boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{f}_j}{f_j^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{20.9}$$

Формулы (20.8) и (20.9) составляют в совокупности ***алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта***.

Ортогональный базис, построенный на векторах единичной длины, называют ***ортонормированным***; для его получения достаточно нормировать каждый из векторов ортогонального базиса его длиной: $\tilde{\boldsymbol{f}}_k = \dfrac{\boldsymbol{f}_k}{f_k}$.

Пример 20.1. Построить ортогональный базис пространства $\mathbf{R}^4$, применяя процесс ортогонализации, на базе векторов-столбцов матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & -6 & 7 \\ -1 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Прежде всего выясним, предоставляет ли *данная* матрица базис пространства $\mathbf{R}^4$. Для этого достаточно решить систему $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \to \\ u_2 \to \\ u_3 \to \\ u_4 \to \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & -6 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{\boxed{\begin{array}{l} u_2 := u_2 - u_1 \\ u_3 := u_3 + 6u_1 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 15 & 45 & 0 & 37 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{l} u_4 := (u_4 - u_2)/10 \\ u_3 := (u_3 + 15u_2)|7 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{l} u_4 := u_4 - u_3 \\ u_2 := -(u_2 + 2u_3) \\ u_1 := u_1 + u_3 \\ u_1 := u_1 - 2u_2 \end{array}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c, \ c \in R..$$

Система оказалась неопределенной, т.е. матрица **A** не предоставляет базис пространства $\mathbf{R}^4$. Линейно независимой является система векторов $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$: $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$.

Применим теперь процесс ортогонализации, используя в формулах (20.9) и (20.8) векторы $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{a}_4$. Находим:

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f_1^{\,2} = 4 + 1 + 9 + 1 = 15;$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{a}_3 - \beta_{21}\,\boldsymbol{f}_1, \text{ где } \beta_{21} = \frac{\boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{f}_1}{f_1^2} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2+1-18}{15} = -1 \Rightarrow \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f_2^2 = 23;$$

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{a}_4 - \beta_{31}\,\boldsymbol{f}_1, -\beta_{32}\,\boldsymbol{f}_2, \text{ где } \beta_{31} = \frac{\boldsymbol{a}_4 \boldsymbol{f}_1}{f_1^2} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{30}{15} = 2; \ \beta_{32} = \frac{\boldsymbol{a}_4 \boldsymbol{f}_2}{f_2^2} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{0}{23} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{a}_4 - 2\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 7-2 \\ 7-6 \\ 8+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ составляют матрицу $\mathbf{F}_{4*3}$ – базу искомого базиса.

Найдем четвертый базисный вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_4$ такой, чтобы обеспечить его ортогональность с тремя ранее полученными. Это значит, что должны выполняться условия $\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{x} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), а это, согласно (20.1), приводит нас к системе $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \to \\ u_2 \to \\ u_3 \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x}_1 & \underline{x}_4 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 10 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{\boxed{\begin{array}{l} u_2 := u_2 - 2u_1 \\ u_3 := u_3 - 5u_1 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -9 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & -14 & 15 & 0 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{l} u_1 := u_1 + 2u_2 \\ u_3 := u_3 - 9u_2 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -15 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 67 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{l} u_2 := -6u_2 \\ u_1 := 6u_1 \end{array}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 6 & -90 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 54 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 67 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{\boxed{\begin{array}{l} u_1 := u_1 - u_3 \\ u_2 := u_2 + u_3 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 & \underline{x}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{6} & -157 & 0 & 0 \\ \mathbf{6} & 0 & 121 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 67 & \mathbf{6} & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -121 \\ 157 \\ 6 \\ -67 \end{pmatrix} \cdot c = \boldsymbol{f}_4 \cdot c, \ c \neq 0. \blacktriangleright$$

▼Замечания к примеру 20.1

1. Построение ортогонального базиса можно начинать с любого вектора исходного базиса и в любой последовательности.

Проведем процесс, приняв $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{a}_1$. Тогда имеем:

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{a}_3 = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow f_1^{\,2} = 1 + 1 + 36 + 0 = 38;$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{a}_4 - \beta_{21}\,\boldsymbol{f}_1, \text{ где } \beta_{21} = \frac{\boldsymbol{a}_4 \boldsymbol{f}_1}{f_1^2} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5+7-42}{38} = -\frac{15}{19} \Rightarrow \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{15}{19}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 110 \\ 148 \\ 43 \\ 152 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow f_2^2 = 3103;$$

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \beta_{31}\,\boldsymbol{f}_1, -\beta_{32}\,\boldsymbol{f}_2, \text{ где } \beta_{31} = \frac{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{f}_1}{f_1^2} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{15}{38}, \ \beta_{32} = \frac{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{f}_2}{f_2^2} = \frac{1}{3103}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 110 \\ 148 \\ 43 \\ 152 \end{pmatrix} = \frac{345}{3103 \cdot 19}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}+\frac{15}{38}\begin{pmatrix}1\\1\\-6\\0\end{pmatrix}-\frac{345}{3103}\cdot\frac{1}{19}\begin{pmatrix}110\\148\\43\\152\end{pmatrix}=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}91\\53\\24\\-38\end{pmatrix}-\frac{690}{3103\cdot 38}\begin{pmatrix}110\\148\\43\\152\end{pmatrix}=\underline{\frac{1}{6206}\cdot\begin{pmatrix}10867\\3281\\2358\\-11726\end{pmatrix}}.$$

Проведем тот же процесс, приняв $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{a}_3$, но $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{a}_4$. Тогда:

$$\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{a}_1-\beta_{21}\boldsymbol{f}_1,\ \text{где}\ \beta_{21}=\frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{f}_1}{f_1^2}=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-6\\0\end{pmatrix}=\frac{2+1-18}{38}=-\frac{15}{38}\Rightarrow \boldsymbol{f}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}+\frac{15}{38}\begin{pmatrix}1\\1\\-6\\0\end{pmatrix}=\underline{\frac{1}{38}\begin{pmatrix}91\\53\\24\\-38\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow f_2^2=345/38;$$

$$\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{a}_4-\beta_{31}\boldsymbol{f}_1,-\beta_{32}\boldsymbol{f}_2,\ \text{где}\ \beta_{31}=\frac{\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{f}_1}{f_1^2}=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}5\\7\\7\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-6\\0\end{pmatrix}=-\frac{15}{19},\quad \beta_{32}=\frac{\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{f}_2}{f_2^2}=\frac{38}{345}\begin{pmatrix}5\\7\\7\\8\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{38}\begin{pmatrix}91\\53\\24\\-38\end{pmatrix}=\frac{690}{345}=2,$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}_3=\begin{pmatrix}5\\7\\7\\8\end{pmatrix}+\frac{15}{19}\begin{pmatrix}1\\1\\-6\\0\end{pmatrix}-2\cdot\frac{1}{38}\begin{pmatrix}91\\53\\24\\-38\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\7\\8\end{pmatrix}+\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-76\\-38\\-114\\38\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\7\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\\2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1\\5\\1\\10\end{pmatrix}}.$$

Как можно видеть, порядок ортогонализации существенно влияет на конечный результат.

2. Проверку взаимной ортогональности найденных базисных векторов $\boldsymbol{f}_i$ удобно производить с помощью построенной на системе $\{\boldsymbol{f}_i\}_4$ ***матрицы Грама*** $\mathbf{G_4}=(g_{ij})$, где $g_{ij}=\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{f}_j$. Для найденного непосредственно в примере 20.1 ортогонального базиса получим (проверьте это!):

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_1^2 & \boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_3 & \boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_4\\ \boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{f}_2^2 & \boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{f}_3 & \boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{f}_4\\ \boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_3 & \boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{f}_4 & \boldsymbol{f}_3^2 & \boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{f}_4\\ \boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_4 & \boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{f}_4 & \boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{f}_4 & \boldsymbol{f}_4^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&0&0&0\\0&23&0&0\\0&0&127&0\\0&0&0&43815\end{pmatrix}.\blacktriangle$$

Пример 20.2. Ортогонализовать исходный базис $\{\boldsymbol{g}_k\}_{\mathbf{n}}=(1, x, x^2,\ldots, x^n,\ldots)$ евклидова пространства многочленов как функций, непрерывных на отрезке $[-1;1]$, со скалярным произведением, представленным формулой (20.3).

Применим формулу (20.8), полагая $\boldsymbol{g}_k=x^k$ и начиная в с $k=0$. Векторы $\boldsymbol{f}_k$ ортогонального базиса будут представлять собой многочлены. Найдем семь первых из них, учитывая, что интегрирование проводится в симметричных пределах и, следовательно, интегралы от нечетной части используемых при вычислении коэффициентов β_{ki} многочленов равны нулю. В результате в формуле (20.8) останутся только β_{ki} с теми индексами i, четности которых совпадают с четностью индекса k. Имеем:

$$\boxed{\boldsymbol{f}_0=\boldsymbol{g}_0=1}\qquad \Rightarrow f_0^2=\int_0^1 1^2\,dx=2;$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{g}_1=x}\ \ (\text{здесь}\ \beta_{10}=0)\qquad \Rightarrow f_1^2=2\int_0^1 x^2\,dx=\frac{2}{3};$$

$$\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{g}_2-\beta_{20}\boldsymbol{f}_0,\ (\text{здесь}\ \beta_{21}=0,\ \beta_{20}=\frac{\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{f}_0}{f_0^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cdot 1\cdot dx=\frac{1}{3};\ \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f}_2=x^2-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f_2^2=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx=2\int_0^1\left(x^4-\frac{2x^2}{3}+\frac{1}{9}\right)dx=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{45};$$

$$\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{g}_3-\beta_{31}\boldsymbol{f}_1\ (\text{здесь}\ \beta_{30}=\beta_{32}=0;\ \beta_{21}=\frac{\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{f}_1}{f_1^2}=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^3\cdot x\,dx=\frac{3}{5}\ \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f}_3=x^3-\frac{3}{5}x}$$

$$\Rightarrow f_3^2=\int_{-1}^{1}\left(x^3-\frac{3x}{5}\right)^2dx=2\int_0^1\left(x^6-\frac{6x^4}{5}+\frac{9x^2}{25}\right)dx=2\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{3}{25}\right)=\frac{8}{175}.$$

Далее будем иметь:

$\boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{g}_4 - \beta_{40}\,\boldsymbol{f}_0 - \beta_{42}\,\boldsymbol{f}_2$, где $\beta_{40} = \dfrac{\boldsymbol{g}_4\boldsymbol{f}_0}{f_0^2} = \int_0^1 x^4\cdot 1\cdot dx = \dfrac{1}{5}$; $\beta_{42} = \dfrac{\boldsymbol{g}_4\boldsymbol{f}_2}{f_2^2} = \dfrac{45}{4}\int_0^1 x^4\left(x^2-\dfrac{1}{3}\right)dx = \dfrac{45}{4}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{15}\right) = \dfrac{6}{7}$;

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}_4 = x^4 - \frac{1}{5} - \frac{6}{7}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{f}_4 = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}};$$

$$\Rightarrow f_4^2 = 2\int_0^1\left(x^8 - \frac{12x^6}{7} + \frac{36x^4}{49} + \frac{6x^4}{35} - \frac{36x^2}{35\cdot 7} + \frac{9}{35^2}\right)dx = 2\left(\frac{1}{9} - \frac{12}{49} + \frac{36}{5\cdot 49} + \frac{6}{5\cdot 35} - \frac{12}{35\cdot 7} + \frac{9}{35^2}\right) = \frac{128}{105^2};$$

$\boldsymbol{f}_5 = \boldsymbol{g}_5 - \beta_{51}\,\boldsymbol{f}_1 - \beta_{53}\,\boldsymbol{f}_3$, где $\beta_{51} = \dfrac{\boldsymbol{g}_5\boldsymbol{f}_1}{f_1^2} = 3\int_0^1 x^6\cdot dx = \dfrac{3}{7}$; $\beta_{53} = \dfrac{\boldsymbol{g}_5\boldsymbol{f}_3}{f_3^2} = \dfrac{5\cdot 35}{4}\int_0^1 x^5\left(x^3 - \dfrac{3}{5}x\right)dx = \dfrac{5\cdot 35}{4}\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{3}{35}\right) = \dfrac{10}{9}$;

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}_5 = x^5 - \frac{3}{7}x - \frac{10}{9}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = x^5 - \frac{10x^3}{9} - \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{3}\right)x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{f}_5 = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x};$$

$\boldsymbol{f}_6 = \boldsymbol{g}_6 - \beta_{60}\,\boldsymbol{f}_0 - \beta_{62}\,\boldsymbol{f}_2 - \beta_{64}\,\boldsymbol{f}_4$, где $\beta_{60} = \dfrac{\boldsymbol{g}_6\boldsymbol{f}_0}{f_0^2} = \int_0^1 x^6\cdot dx = \dfrac{1}{7}$; $\beta_{62} = \dfrac{\boldsymbol{g}_6\boldsymbol{f}_2}{f_2^2} = \dfrac{45}{4}\int_0^1 x^6\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right)dx = \dfrac{45}{4}\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3\cdot 7}\right) = \dfrac{5}{7}$;

$$\beta_{64} = \frac{\boldsymbol{g}_6\boldsymbol{f}_4}{f_4^2} = \frac{105^2}{64}\int_0^1 x^6\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right)dx = \frac{105^2}{64}\left(\frac{1}{11} - \frac{2}{21} + \frac{3}{35\cdot 7}\right) = \frac{105^2}{64}\left(\frac{3}{35\cdot 7} - \frac{1}{33\cdot 7}\right) = \frac{9\cdot 35^2}{64}\cdot\frac{64}{35\cdot 33\cdot 7} = \frac{15}{11};$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f}_6 = x^6 - \frac{1}{7} - \frac{5}{7}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{15}{11}\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right) \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{f}_6 = x^6 - \frac{15}{11}x^4 - \frac{5}{11}x^2 - \frac{5}{231}}.$$

Проверьте самостоятельно ортогональность полученного вектора с найденными выше векторами $\boldsymbol{f}_0$, $\boldsymbol{f}_2$ и $\boldsymbol{f}_4$ (для остальных векторов это очевидно).

Нами получены, с точностью до числовых множителей, семь попарно ортогональных многочленов, называемых _многочленами Лежандра_. Ясно, что процесс ортогонализации можно в данном случае продолжать бесконечно. ►

§21. Ортогональное дополнение подпространства

►_Определение_ 21.1. _**Ортогональным дополнением**_ $\mathbf{L}^{\perp}$ _**подпространства**_ **L** пространства $\mathbf{R^n}$ называют множество всех векторов $\boldsymbol{y}\in\mathbf{L}^{\perp}$ таких, что $\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x}$ (т.е. $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = 0$) для любого $\boldsymbol{x}\in\mathbf{L}$.◄

Ортогональное дополнение $\mathbf{L}^{\perp}$ также является линейным подпространством пространства $\mathbf{R^n}$, при этом $\dim(\mathbf{L}) + \dim(\mathbf{L}^{\perp}) = n$ и $\mathbf{R^n} = \mathbf{L}\oplus\mathbf{L}^{\perp}$. Процедура отыскания ортогонального дополнения аналогична процедуре отыскания алгебраического дополнения подпространства. Более того, алгебраическое дополнение подпространства _евклидова_ пространства является ничем иным, как ортогональным дополнением подпространства. Это связано с тем, что систему $\mathbf{A^T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, состоящую из n уравнений, можно записать через скалярные произведения: $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{x} = 0$, $i = 1,2,\ldots, n$. Легко проверить, что все найденные в примерах 18.1 и18.2 базисы подпространств и их ортогональных дополнений являются взаимно ортогональными.

Пример 21.1. Линейное подпространство **L** натянуто на векторы-столбцы матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти базис ортогонального дополнения $\mathbf{L}^{\perp}$ подпространства **L**.

Решение. Один из базисов **F** ортогонального дополнения $\mathbf{L}^{\perp}$ подпространства **L** предоставит нам ф.с.р. системы $\mathbf{A^T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{array}{cccc} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{x_3} & \underline{x_4} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{u_2 := u_2 - 2u_1\\ u_3 := u_3 - u_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1\\ 2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{c} = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^2.►$$

Пример 21.2. Линейное подпространство **L** задано системой уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 9x_3 - \ \ x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение $\mathbf{L}^{\perp}$ подпространства **L**.

<u>*Решение.*</u> Найдем ф.с.р. данной нам системы $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, которая предоставит нам базис **F** ортогонального дополнения $\mathbf{L}^{\perp}$ подпространства **L**:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{x_3} & \underline{x_4} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{\boxed{\begin{array}{c} u_3 := u_3 - 3u_1 + u_2 \\ u_2 := -(u_2 - 2u_1) \\ u_1 := u_1 - 2u_2 \end{array}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -9 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 9 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^2 .$$

Тогда искомой системой, задающей ортогональное дополнение $\mathbf{L}^{\perp}$, будет, например, система $\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 + \ \ 9x_2 + x_3 \qquad = 0, \\ \qquad\qquad x_2 \qquad + x_4 = 0. \end{cases}$ ►

Покажем, что любой вектор $\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y}$ принадлежит любому [собственному] подпространству $\mathbf{L} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, а $\boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^{\perp}$. Вектор $\boldsymbol{y}$ называют *ортогональной проекцией* вектора $\boldsymbol{h}$ на **L**, а вектор $\boldsymbol{z}$ – *ортогональной составляющей* вектора $\boldsymbol{h}$ относительно **L**.

Поскольку пространство $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ есть прямая сумма подпространств **L** (с базисом $\mathbf{A}_{\mathbf{n*r}}$) и $\mathbf{L}^{\perp}$ (с базисом $\mathbf{B}_{\mathbf{n*(n-r)}}$), то, выражая $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ через соответствующие базисы, получаем:

$$\boldsymbol{h} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{a}_i y_i + \sum_{i=1}^{n-r} \boldsymbol{b}_i z_i \ . \qquad (21.1)$$

Теперь, умножая обе части скалярно на каждый вектор обоих базисов, приходим, с учетом попарной ортогональности векторов $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{b}_j$, к неоднородной системе уравнений, состоящей из двух независимых подсистем:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{r} (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j) y_i = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{a}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r; \\ \sum\limits_{i=1}^{n-r} (\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j) z_i = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{b}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-r. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{r}} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{d}, \text{ где } \boldsymbol{d} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{h}; \\ \mathbf{G}_{\mathbf{n-r}} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}, \text{ где } \boldsymbol{f} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{h}. \end{cases} \qquad (21.2)$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{r}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$ и $\mathbf{G}_{\mathbf{n-r}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}$ – матрицы Грама, построенные соответственно на системах векторов $(\boldsymbol{a}_i)_{\mathbf{r}}$ и $(\boldsymbol{b}_i)_{\mathbf{n-r}}$. Решая системы (21.2), находим координаты y_i и z_i разложений соответственно вектора $\boldsymbol{y}$ в **A**-базисе и вектора $\boldsymbol{z}$ в **B**-базисе.

Поскольку матрица Грама, построенная на линейно независимой системе векторов, не вырождена [2, п.8.8.6], то это влечет за собой определенность указанных систем уравнений, т.е. единственность полученного разложения, причем *при любой паре взаимно ортогональных базисов*.

Очевидно, что в силу единственности разложения достаточно решить только одну из представленных формулой (21.2) систем, а проверку правильности решения делать через скалярное произведение полученных составляющих $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{h} - \boldsymbol{y}$ или $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} - \boldsymbol{z}$.

Пример 21.3. Линейное подпространство **L** задано системой уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 \ \ + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 0, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{h} = (7, -4, -1, 2)^{\mathbf{T}}$ на **L** и его ортогональную составляющую $\boldsymbol{z}$ относительно **L**.

Решение. Ф.с.р. данной нам системы предоставит нам базис **B** подпространства $\mathbf{L}^{\perp}$:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^2 .$$

$u_3 := -(u_3 - u_2)/2$
$u_2 := u_2 - 2u_1;\ u_3 := u_3 + u_2$
$u_1 := u_1 - 2u_2$

Теперь система $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, задающая $\mathbf{L}^{\perp}$, дает нам базис $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ подпространства **L**, хотя находить его – излишне, поскольку матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ уже находится в левой части р.м., полученной на последнем этапе решения системы (*).

Формируем матрицу Грама на полученном базисе **B**: $\mathbf{G_2} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 75 \end{pmatrix}$ с $|\mathbf{G}| = 101$, находим $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b}_1 = 4 - 1 = 3$, $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b}_2 = -35 - 28 + 2 = -61$. Учитывая, что **B** – базис подпространства $\mathbf{L}^{\perp}$, составляем систему $\mathbf{G}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -7 & 3 \\ -7 & 75 & -61 \end{array}\right) \end{array}$ и решаем ее методом Крамера:

$$z_1 = \frac{1}{101} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -61 & 75 \end{vmatrix} = \frac{225 - 427}{101} = -2,\ z_2 = \frac{1}{101} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -61 \end{vmatrix} = \frac{-122 + 21}{101} = -1 .$$

Итак, $\boldsymbol{z} = -2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0+5 \\ 2-7 \\ -2+0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тогда $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ -4+5 \\ -1+2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} = 10–5–2–3 = 0)$.▶

Пример 21.4. Линейное подпространство **L** натянуто на систему векторов-столбцов матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{h} = (5, 2, -2, 2)^{\mathrm{T}}$ на **L** и его ортогональную составляющую $\boldsymbol{z}$ относительно **L**.

Решение. Базис **B** подпространства $\mathbf{L}^{\perp}$ предоставит нам ф.с.р. системы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^2 .$$

$u_3 := (u_1 + u_3)/3$
$u_1 := (u_1 + u_2);\ u_2 := u_2 - u_3$

Учитывая, что **B** – базис подпространства $\mathbf{L}^{\perp}$, составляем систему $\mathbf{G}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}$. Ее формирование удобнее всего проводить с использованием матрицы Грама, построенной на матрице **B** и векторе $\boldsymbol{h}$: $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{B},\boldsymbol{h}) = \tilde{\mathbf{G}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 14 & -12 \\ \hline 5 & -12 & 37 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{G} & \boldsymbol{d} \\ \hline * & * \end{array}\right)$. Игнорируя последнюю строку полученной матрицы, получаем систему $\mathbf{G}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 14 & -12 \end{array}\right) \end{array}$. Решаем ее методом Крамера:

$$z_1 = \frac{1}{41} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -12 & 14 \end{vmatrix} = \frac{70 + 12}{41} = 2,\ z_2 = \frac{1}{41} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} = \frac{-36 - 5}{41} = -1 .$$

Итак, $\boldsymbol{z} = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2+0 \\ -2+3 \\ 0-1 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$;. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} - \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-1 \\ -2+1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} = 6 + 1 + 1 - 8 = 0)$. ▶

▼ Замечания к примеру 21.4

1. Найденный выше **B**-базис – не единственный, однако изменение базиса не влияет на конечный результат. Изменим базис за счет алгоритма решения системы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{x_3} & \underline{x_4} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xLeftrightarrow[u_1 := u_1 - 2u_2 + u_3]{u_3 := u_3 - u_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^2,$$

получаем другую матрицу Грама $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{B},\boldsymbol{h}) = \tilde{\mathbf{G}}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & -5 \\ 8 & 35 & -27 \\ \hline 5 & -12 & 37 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{G} & \boldsymbol{d} \\ \hline * & * \end{array}\right)$. Теперь решение системы $\mathbf{G}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \underline{z_1} & \underline{z_2} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & -5 \\ 8 & 35 & -27 \end{array}\right) \end{array}$ дает

$$z_1 = \frac{1}{41} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -27 & 35 \end{vmatrix} = \frac{-175 + 216}{41} = 1,\quad z_2 = \frac{1}{41} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -27 \end{vmatrix} = \frac{-81 + 40}{41} = -1,$$

и мы снова получаем $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 1+0 \\ 0-1 \\ -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} - \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-1 \\ -2+1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Базис можно изменить, используя невырожденные матрицы **S** перехода от **B**–базиса к другому базису. Возьмем в качестве базиса подпространства $\mathbf{L}^{\perp}$, например, такие векторы: $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$. Это значит, что матрица **S** перехода (см. §17) есть $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, а сам **V**-базис будет представлен матрицей

$$\mathbf{V} = \mathbf{BS} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -11 & 5 \\ 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(хотя его можно найти и напрямую). Теперь имеем: $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{V},\boldsymbol{h}) = \tilde{\mathbf{G}}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -11 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$ $\left(\begin{array}{cc|c} 150 & -79 & -26 \\ -79 & 55 & 29 \\ \hline -26 & 29 & 37 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{G} & \boldsymbol{d} \\ \hline * & * \end{array}\right)$, а система $\mathbf{G}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \underline{z_1} & \underline{z_2} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 150 & -79 & -26 \\ -79 & 55 & 29 \end{array}\right) \end{array} \xLeftrightarrow[u_1 := u_1 + 2u_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} -8 & 31 & 32 \\ -79 & 55 & 29 \end{array}\right) \xLeftrightarrow[u_2 := (u_2 - 2u_2)/7]{} \left(\begin{array}{cc|c} -8 & 31 & 32 \\ -9 & -1 & -5 \end{array}\right)$ дает

$$z_1 = \frac{1}{7 \cdot 41} \cdot \begin{vmatrix} 32 & 31 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-32 + 155}{7 \cdot 41} = \frac{3 \cdot 41}{7 \cdot 41} = \frac{3}{7},\quad z_2 = \frac{1}{7 \cdot 41} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 32 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} = \frac{40 + 288}{7 \cdot 41} = \frac{8 \cdot 41}{7 \cdot 41} = \frac{8}{7}.$$

Таким образом, получен, как и выше, вектор $\boldsymbol{z} = (3\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2)/7 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6+8 \\ -33+40 \\ 9-16 \\ -12+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Пусть матрицы **B** и **V** – два различных базиса подпространства $\mathbf{L}^{\perp}$, причем **V**-базис порожден **B**–базисом (это значит, что базисы **B** и **V** связаны между собой соотношением $\mathbf{V} = \mathbf{BS} \Leftrightarrow \mathbf{VS}^{-1} = \mathbf{B}$).

Тогда соответствующие им матрицы Грама $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ и $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$ связаны соотношением: $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{GS}$.▲

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.
2. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005.
3. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.
4. Головина Л.И. Линейная алгебра и ее приложения. – М.: Наука, 1979.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1978.
7. Шамолин М.В. Высшая математика. – М.: Издательство «Экзамен», 2008.